Exercice - M0163

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la famille de droite $(\Delta_a)_{a \in \mathbb{R}}$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad 2ax + (a^2 - 1)y - 2a = 0$$

1) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, Δ_a est une droite.

2) Montrer que toutes les droites de la famille $(\Delta_a)_{a \in \mathbb{R}}$ passent par un point fixe B, et préciser ses coordonnées.

Pour la suite, on désigne par $\mathcal{C}_a$ le cercle de centre $I_a(0; -a)$ et de rayon $|a|$.

3) Montrer (par exemple par un argument de distance) que pour tout $a \in \mathbb{R}^\star$, la droite Δ_a est tangente au cercle $\mathcal{C}_a$.

Pour toute la suite, on se donne $a \in \mathbb{R}^\star$ et T_a le projeté orthogonal du point I_a sur la droite Δ_a.

4) Calculer les coordonnées du point T_a.

5) On considère Γ_a le cercle de diamètre $[BI_a]$. Déterminer un point remarquable très simple de Γ_a différent de T_a , de B et de I_a.

6) Justifier que l'on a aussi $T_a \in \Gamma_a$.

7) Montrer que, lorsque a varie dans $\mathbb{R}$, le point T_a reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.