Exercice - M0163C

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la famille de droite $(\Delta_a)_{a\in\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad 2ax + (a^2-1)y - 2a = 0$$

1) Justifions que pour tout $a \in \mathbb{R}$, Δ_a est une droite. Quelque soit la valeur de a nous obtenons une équation de la forme

$$Ax + By + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad A = 2a \quad B = a^2 - 1 \quad -2a = C$$

Il s'agit donc d'une équation cartésienne de droite.

2) Montrons que toutes les droites de la famille $(\Delta_a)_{a\in\mathbb{R}}$ passent par un point fixe B. Soit a et b deux réels, Δ_a et Δ_b les droites associées. Cherchons leur intersection. Résolvons donc le système

$$\begin{array}{cccc} 2ax & +(a^2-1)y & -2a & = 0 \\ 2bx & +(b^2-1)y & -2b & = 0 \end{array}$$

Il vient

$$b(a^2-1)y - a(b^2-1)y = 0$$

et donc $y = 0$ et $x = 1$ est un point commun aux droites Δ_a et Δ_b. Si toutes les droites passent par un même point ça ne peut être que le point $B(1;0)$. On vérifie aisément que pour tout $a \in \mathbb{R}$ la droite Δ_a passe par le point B.

$$2a \times 1 + (a^2-1) \times 0 - 2a = 0$$

Pour la suite, on désigne par $\mathcal{C}_a$ le cercle de centre $I_a(0; -a)$ et de rayon $|a|$.

3) Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}^\star$, la droite Δ_a est tangente au cercle $\mathcal{C}_a$. Calculons donc la distance du point I_a à la droite Δ_a

$$\begin{aligned} d(I_a;\Delta_a) &= \frac{|2a\times 0 + (a^2-1)(-a) - 2a|}{\sqrt{2a^2 + (a^2-1)^2}} \\ &= \frac{|(-a)(a^2+1)|}{\sqrt{4a^2 + a^4 - 2a^2 + 1}} \\ &= \frac{|a|(a^2+1)}{\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}} \\ &= \frac{|a|(a^2+1)}{\sqrt{(a^2+1)^2}} \\ &= |a| \end{aligned}$$

La distance du point I_a à la droite Δ_a est $|a|$ donc égale au rayon du cercle $\mathcal{C}_a$. On en déduit que la droite Δ_a est tangente au cercle.

Pour toute la suite, on se donne $a \in \mathbb{R}^\star$ et T_a le projecté orthogonal du point I_a sur la droite Δ_a.

4) Calculons les coordonnées du point T_a. Soient, les vecteurs

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 2a \\ a^2-1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d}\left(1-a^2\right)$$

$\vec{n}$ est le vecteur normal à la droite Δ_a et $\vec{d}$ un vecteur orthogonal à $\vec{n}$, donc un vecteur directeur de la droite Δ_a et un vecteur normal à la perpendiculaire à Δ_a passant par I_a. L'équation de la perpendiculaire est donc

$$(1-a^2)x + 2ay + k = 0$$

Le point I_a appartient à cette droite donc

$$(1-a^2)\times 0 + 2a(-a) + k + 0 \implies k = 2a^2$$

T_a est donc le point d'intersection des droites déquation

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 2ax & + & (a^2-1)y & = 2a \\ (1-a^2)x & + & 2ay & = -2a \end{array}\right.$$

Le déterminant du système est :

$$\Delta = (2a)^2 - (a^2-1)(1-a^2) = 4a^2 + (a^2-1)^2 = (a^2+1)^2$$

Δ n'est jamais nul, le système est donc de Cramer et il y a une unique solution

$$x_H = \frac{\begin{vmatrix} 2a & a^2-1 \\ -2a^2 & 2a \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y_H = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 2a \\ 1-a^2 & -2a^2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Conclusion les coordonnées du projeté orthogonal sont

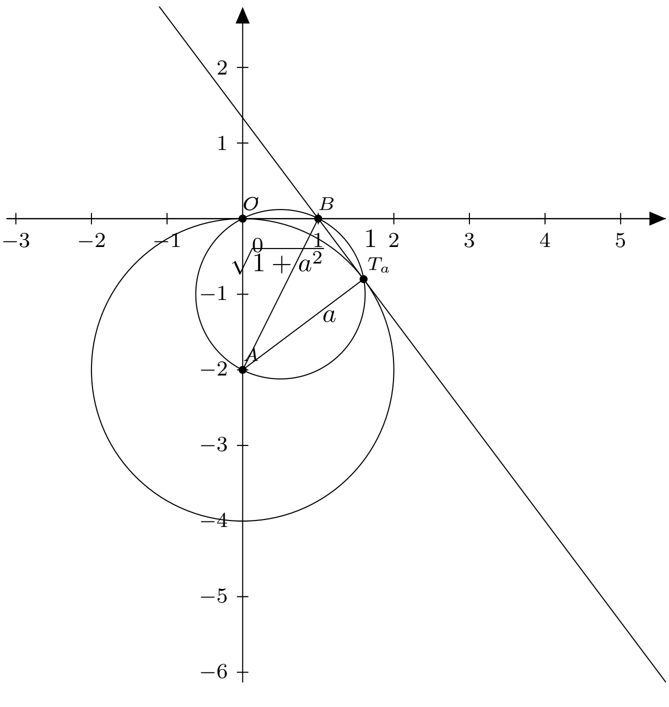
$$x_H = \frac{4a^2 + 2a^2(a^2-1)}{(a^2+1)^2} \qquad y_H = \frac{-4a^3 + 2a(a^2-1)}{(a^2+1)^2}$$

5) On considère Γ_a le cercle de diamètre $[BI_a]$. Déterminons un point remarquable très simple de Γ_a différent de T_a , de B et de I_a. On remarque que le triangle OI_aB est rectangle en O. Le point O appartient donc au cercle de diamètre $[I_aB]$

6) Justifions que l'on a aussi $T_a \in \Gamma_a$. La droite (I_aT_a) est perpendiculaire à la droite (I_aB) d'après c que nous avons vu dans les questions précédentes. Le triangle I_aBT_a est donc rectangle en T_a. T_a est donc sur le cercle Γ_a.

7) Montrons que, lorsque a varie dans $\mathbb{R}$, le point T_a reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon. On peut le justifer aisément géométriquement (voir le dessin et les longueurs des cotés du triangle ABT_a. Par le calcul, ce n'est pas trop horrible. Calculons la distance BT_a.

$$\begin{aligned}
(x_H-1)^2 + y_H^2 &= \left(\frac{4a^2+2a^2(a^2-1)}{(a^2+1)^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{-4a^3+2a(a^2-1)}{(a^2+1)^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(a^2+1)^4}\left[\left(4a^2+2a^2(a^2-1)-(a^2+1)^2\right)\right)^2 + \left(2a(-2a^2+a^2-1))\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{(a^2+1)^4}\left[\left(2a^2(a^2-1)-(a^2-1)^2\right)^2 + 4a^2(-a^2-1)^2\right] \\
&= \frac{1}{(a^2+1)^4}\left[\left((a^2-1)(2a^2-a^2+1)\right)^2 + 4a^2(-a^2-1)^2\right] \\
&= \frac{1}{(a^2+1)^4}\left[(a^2-1)^2(a^2+1)^2 + 4a^2(a^2+1)^2\right] \\
&= \frac{1}{(a^2+1)^4}\left[(a^2+1)^2\left((a^2-1)^2+4a^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{(a^2+1)^4}\left[(a^2+1)^2(a^2+1)^2\right] \\
&= \frac{(a^2+1)^4}{(a^2+1)^4} \\
&= 1
\end{aligned}$$


O
B
A
T_a
$\sqrt{1+a^2}$
a
1
0
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6