Exercice - M0164C

Exprimons la distance entre les deux navires en fonction du temps. Construisons un repère adapté au problème. Prenons comme origine du repère le point de croisement des trajectoires, comme axe des abscisses, la trajectoire du navire naviguant vers l'est orientée vers l'est et comme axe des ordonnés la trajectoire du navire naviguant vers le nord orientée vers le nord (faire un dessin). La position du premier navire est représentée par un point A_t et le second par un point B_t dont la position change au cours du temps. A l'instant $t = 0$, les navires sont représentés par deux points $A_0 = A(t = 0)$ et $B_0 = B(t = 0)$. Les coordonnées sont

$$A_0 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Les deux navires naviguent à la même vitesse et cette vitesse est constante. Soit v la vitesse des bateaux. A un instant t quelconque nous avons

$$A_t \begin{pmatrix} -5 + vt \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B_t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 + vt \end{pmatrix}$$

Soit d la fonction représentant la distance entre les navires en fonction du temps

$$d(t) = A_tB_t = \|\overrightarrow{A_tB_t}\|$$

Les coordonnées du vecteurs sont :

$$\overrightarrow{A_tB_t} \begin{pmatrix} 5 - vt \\ -3 + vt \end{pmatrix}$$

On en déduit l'expression de d

$$d(t) = \sqrt{(5 - vt)^2 + (-3 + vt)^2} = \sqrt{2v^2t^2 - 16vt + 34}$$

Etudions les variations de la fonction d. Calculons sa dérivée.

$$d'(t) = \frac{4v^2t - 16v}{2\sqrt{2v^2t^2 - 16vt + 34}}$$

La dérivée est du signe du numérateur, qui est une fonction affine. Elle s'annule est change pour

$$4v^2t - 16v = 0 \iff t = \frac{4}{v}$$

La distance entre les navires est donc minimale à la date $t = 4$. La distance est alors :

$$d\left(\frac{4}{v}\right) = \sqrt{2v^2\left(\frac{4}{v}\right)^2 - 16v\left(\frac{4}{v}\right) + 34} = \sqrt{32 - 64 + 34} = \sqrt{2}$$

La distance minimale est donc $d_{min} = \sqrt{2} \simeq 1,41$km. La visibilité étant de 1,5 km les deux navires « se veront ».

d_{min} peut également être calculée par

$$d\left(\frac{4}{v}\right) = \sqrt{\left(5 - v\frac{4}{v}\right)^2 + \left(-3 + v\frac{4}{v}\right)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{2}$$