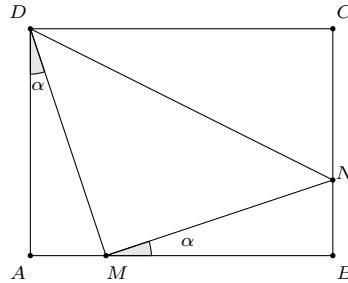


Exercice - M0166C

1) Montrons que les droites (MD) et (MN) sont perpendiculaires. Commençons par représenter la situation.



Une première idée est d'utiliser le théorème de Pythagore. Le triangle DAM est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

De même le triangle MBN est rectangle en B donc

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

Enfin le triangle DCN est rectangle en C , donc

$$DN^2 = DC^2 + CN^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

Nous avons donc

$$DM^2 + MN^2 = 10 + 10 = 20 \quad \text{et} \quad DN^2 = 20 \implies DN^2 = DM^2 + MN^2$$

Nous pouvons donc conclure, d'après le théorème de Pythagore que le triangle DMN est rectangle en M autrement dit les droites (MD) et (MN) sont perpendiculaires.

Une autre méthode est d'analyser les angles. Les triangles DAM et MBN sont rectangles respectivement en A et B . De plus,

$$AD = BM \quad \text{et} \quad AM = BN$$

Donc les triangles ADM et MBN sont semblables. Nous avons, pour le triangle DAM :

$$\widehat{ADM} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{DAM} = \frac{\pi}{2} \implies \widehat{AMD} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

En effet, la somme des angles d'un triangle est égale à π . De même pour le triangle MBN , nous avons :

$$\widehat{BMN} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{MBN} = \frac{\pi}{2} \implies \widehat{BNM} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Enfin, les points A, M et B étant alignés, nous avons

$$\widehat{AMB} = \pi$$

Or

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMD} + \widehat{MDN} + \widehat{BMN}$$

Donc

$$\pi = \frac{\pi}{2} - \alpha + \widehat{MDN} + \alpha \implies \widehat{MDN} = \frac{\pi}{2}$$

Conclusion : les droites (MD) et (MN) sont perpendiculaires.