Exercice - M0167C

La seule méthode de calcul de primitive à la disposition des élèves de terminale est de reconnaitre de quoi une fonction est la dérivée. Dans les cas les plus simples, on a une fonction proche d'une formule présente dans le tableau des primitives. Parfois c'est plus difficile à reconnaitre. C'est le cas dans les exemples qui suivent.

1) Calculer la primitive

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^{-x-1}$$

La fonction primitive sera de la forme $F(x) = p(x)e^{-x-1}$ ou p est un polynome de degré 2. Donc

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x-1}$$

Le calcule de la dérivée donne

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2ax + b)e^{-x-1} + (ax^2 + bx + c)e^{-x-1}(-1) \\ &= (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x-1} \end{aligned}$$

Donc

$$F'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x-1}$$

Or $F'(x) = f(x)$ pour tout x réel, on en déduit l'égalité des polynomes

$$-ax^2 + (2a - b)x + b - c = x^2 + 4x + 5$$

Et, en identifiant les coefficients, il vient

$$-a = 1 \qquad 2a - b = 4 \qquad b - c = 5$$

d'ou l'on déduit immédiatement

$$a = -1 \qquad b = -6 \qquad c = -11$$

En conclusion

$$F(x) = -(x^2 + 6x + 11)e^{-x-1}$$

2) Calculer la primitive de

$$f(x) = x^2\sqrt{x + 1}$$

Si l'on dérive une fonction de la forme $u(x) = p(x)\sqrt{x + 1}$ on obtient

$$u'(x) = p'(x)\sqrt{x + 1} + \frac{p(x)}{2\sqrt{x + 1}} = \frac{2p'(x)(x + 1) + p(x)}{2(x + 1)}\sqrt{x + 1}$$

Pour obtenir $x^2\sqrt{x + 1}$, on peut choisir pour $p(x)$ un polynome de degré 3.

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} g(x) &= (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x + 1} \\ g'(x) &= \frac{2(3ax^2 + 2bx + c)(x + 1) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}{2(x + 1)}\sqrt{x + 1} \\ &= \frac{7ax^3 + (6a + 5b)x^2 + (4b + 3c)x + 2c + d}{2(x + 1)}\sqrt{x + 1} \end{aligned}$$

On aura une primitive de f si

$$7ax^3 + (6a + 5b)x^2 + (4b + 3c)x + 2c + d = 2(x + 1)x^2$$

Ce qui conduit par identification à

$$7a = 2 \qquad 6a + 5b = 2 \qquad 4b + 3c = 0 \qquad 2c + d = 0$$

On trouve

$$a = \frac{2}{7} \qquad b = \frac{2}{35} \qquad c = -\frac{8}{105} \qquad d = \frac{16}{105}$$

Conclusion

$$F(x) = \frac{30x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{105}\sqrt{x+1}$$

3) Calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2-1)^2}$$

L'idée ici est de séparer la fraction en éléments plus simple que l'on saura intégrer

$$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

En réduisant au même dénominateur on obtient

$$f(x) = \frac{(a+b)x^2 + (2a-2b)x + a + b}{(x^2-1)^2}$$

En identifiant les coefficients du numérateur, on obtient

$$a + b = 3 \qquad 2a - 2b = -2$$

La résolution donne immédiatement $a = 1$ et $b = 2$. Autrement dit

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

Et donc

$$F(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1} = \frac{1-3x}{x^2-1}$$

4) Calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{4x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Dans le formulaire on dispose de

$$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \qquad F(x) = 2\sqrt{u(x)}$$

Malheureusement, la fonction proposée ici n'est pas exactement de cette forme. On peut néanmoins rechercher la primitive sous la forme

$$F(x) = p(x)\sqrt{2x^2+1}$$

on aura alors

$$F'(x) = p'(x)\sqrt{2x^2+1} + p(x)\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}4x = \frac{p'(x)(2x^2+1) + 2xp(x)}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Le résultat du numérateur doit être un polynome de degré 2, donc p est de degré, autrement dit

$$p(x) = ax + b \qquad p'(x) = a$$

Il vient alors

$$F'(x) = \frac{a(2x^2+1)+2x(ax+b))}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{(2ax^2+a+2ax^2+2bx)}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{4ax^2++2bx+a}{\sqrt{2x^2+1}}$$

En identifiant les coefficients, on a immédiatement $a = 1$ et $b = 0$. Finalement

$$F(x) = x\sqrt{2x^2+1}$$

5) Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x$$

Posons $f(x) = \sin^2 x \cos^5 x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \cos^5 x = \sin^2 x \cos^4 x \cos x = \sin^2(1-\sin^2 x)^2 \cos x \\ &= \sin^2 x(1-2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x \\ &= \left(\sin^6 x - 2\sin^4 x + \sin^2 x\right)\cos x \end{aligned}$$

Sous cette forme on reconnait

$$f(x) = p(\sin x)\cos x = p(\sin x)(\sin x)'$$

avec

$$p(x) = x^6 - 2x^4 + x^2$$

On aura donc

$$F(x) = P(\sin x) = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x$$

Finalement

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{105}$$

6) Calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$$

Il suffit de reconnaitre la dérivée d'un quotient

$$F(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

7) Calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

La encore il faut reconnaitre la dérivée d'un quotient, dont le dénonminateur est x^2+1 et sa dérivée est $2x$. Donc, si

$$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad v(x) = x^2+1$$

alors

$$F'(x) = \frac{(x^2+1)u'(x) - u(x)2x}{(x^2+1)^2}$$

Le numérateur doit être égale à $1-x^2$. Donc, si $u(x)$ est un polynome, un polynome de degré 1 doit convenir

$$u(x) = ax+b \qquad u'(x) = a$$

Il vient alors

$$F'(x) = \frac{(x^2+1)a - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2 + a - 2ax^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 + 2bx + (a+b)}{(x^2+1)^2}$$

Qui conduit par identification des coefficients à

$$-a = -1 \qquad 2b = 0 \qquad a + b = 1$$

et donc

$$a = 1 \quad b = 0$$

Conclusion

$$F(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

8) Calculer la primitive de

$$f(x) = xe^x$$

Ce type de primitive se calcule simplement par intégration par partie, autrement dit en utilisant la formule de dérivation du produit !

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - uv'$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

$$F(x) = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

9) Calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

C'est de la forme $u(x)^2u'(x)$ avec $u(x) = \ln x$

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln^3(x)$$

10) Calculer la primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

C'est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$

$$F(x) = \ln(\ln x)$$