

### Exercice - M0175C

Pour déterminer l'intersection des plans d'équation cartésienne

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

nous devons résoudre le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

Par la méthode des combinaisons (recommandée) cela donne :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ y - 5z = -13 \\ 5y - 11z = -23 \end{cases}$$

On a gardé la ligne  $L_1$ , la ligne  $L_2$  a été remplacée par  $L_2 - 2L_1$  et la ligne  $L_3$  a été remplacée par  $L_3 - 3L_1$ .

$$\begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ y - 5z = -13 \\ 14z = 42 \end{cases}$$

Les lignes  $L_1$  et  $L_2$  sont inchangées. La ligne  $L_3$  a été remplacée par  $L_3 - 5L_2$ . Il ne reste qu'« remonter » le système... A partir de  $L_3$  on déduit immédiatement  $z$ , en reportant  $z$  dans  $L_2$  on calcule  $y$  et enfin, en reportant  $x$  et  $y$  dans  $L_1$  on obtient  $x$ .

$$\begin{cases} z = 3 \\ y = -13 + 5 \times 3 = 2 \\ x = 2 - 3 \times 3 + 8 = 1 \end{cases}$$

Conclusion

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Le système d'équations peut également être résolu par la méthode des substitutions. Dans ce cas, on exprime une inconnue en fonction des deux autres à partir d'une des équations et on reporte l'expression dans les deux autres équations, qui forment alors un système de deux équations à deux inconnues. Par cette méthode, il vient :

$$\begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

A partir de l'équation on exprime  $x$  en fonction de  $y$  et  $z$ .

$$\begin{cases} x = y - 3z + 8 \\ 2(y - 3z + 8) - y + z = 3 \\ 3(y - 3z + 8) + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = y - 3z + 8 \\ y - 5z = -13 \\ 5y - 11z = -23 \end{cases}$$

La deuxième équation permet d'exprimer  $y$  en fonction de  $z$  puis de reporter le résultat dans la troisième équation. On obtient :

$$\begin{cases} x = y - 3z + 8 \\ y = 5z - 13 \\ 5(5z - 13) - 11z = -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 3z + 8 \\ y = 5z - 13 \\ 5(5z - 13) - 11z = -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 3z + 8 \\ y = 5z - 13 \\ 14z = 42 \end{cases}$$

Et comme précédemment, il n'y a plus qu'à « remonter » le système.

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \times 3 + 8 = 1 \\ y = 5 \times 3 - 13 = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Conclusion

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$