Exercice - M0177C

1) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. Nous avons

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}\qquad N\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\qquad P\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

d'ou

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}\qquad\qquad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Nous constatons déjà que les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc que les points M, N, P forment bien un triangle.

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = (-1)\times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1) + \frac{1}{4}\times(-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux, le triangle MNP est rectangle en M. Calculons les normes des vecteurs

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+4+1}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$
$$\|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Conclusion : MNP est un triangle rectangle en M. Il n'est ni isocèle, ni équilatéral.

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \frac{\sqrt{21}}{4}\qquad \|\overrightarrow{MP}\| = \sqrt{5}$$

2) Recherche un vecteur $\vec{n}$normal au plan $\mathcal{P}$ passant par les points MNP.

$$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\qquad \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN} = 0\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{MP} = 0$$

Ce qui conduit au système

$$\begin{cases} -a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{cases} -b + \frac{c}{2} = 2a \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b + \frac{c}{2} = 2a \\ \frac{5}{2}c = 2a \end{cases}$$

Et finalement

$$\begin{cases} b = -\frac{8}{5}a \\ c = \frac{4}{5}a \end{cases}$$

en prenant $a = 5$ on obtient $b = -8$ et $c = 4$. Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc

$$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix}$$

L'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc de la forme

$$ax + by + cz + d = 0 \iff 5x - 8y + 4z + d = 0$$

En écrivant que M appartient au plan, il vient

$$5 \times 1 - 8 \times 1 + 4 \times \frac{3}{4} + d = 0 \iff d = 0$$

Conclusion : l'équation cartésienne du plan MNP est :

$$5x - 8y + 4z = 0$$

3) Recherchons la représentation paramétrique de Δ la hauteur issue de F. Cette droite passe par F et est dirigée par le vecteur $\vec{n}$ donc

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

4) Nous pouvons maintenant déterminer les coordonnées de K, point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$. Il convient de résoudre le système

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \\ 5x - 8y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \\ 5(1 + 5t) - 8(-8t) + 4(1 + 4t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \\ t = -\dfrac{3}{35} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 5\left(-\dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{4}{7} \\ y = -8\left(-\dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{24}{35} \\ z = 1 + 4\left(-\dfrac{3}{35}\right) = \dfrac{23}{35} \\ t = -\dfrac{3}{35} \end{cases}$$

Conclusion : le point K, pied de la hauteur issue de F a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{24}{35} \\ \frac{23}{35} \end{pmatrix}$$

5) Calculons maintenant le volume du tétraèdre $MNPF$. Le volume du tétraèdre est le tiers, du produit de l'aire de la base par la hatueur.

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}MN \times MP\right) \times FK$$

Il nous faut donc calculer FK.

$$\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} \frac{4}{7}-1 \\ \frac{24}{35}-0 \\ \frac{23}{35}-1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{24}{35} \\ -\frac{12}{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} FK &= \|\overrightarrow{FK}\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{24}{35}\right)+\left(-\frac{12}{35}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9\times 25+576+144}{1225}} \\ &= \sqrt{\frac{27}{35}} \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$MN = \frac{\sqrt{21}}{4} \qquad MP = \sqrt{5} \qquad FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$$

Finalement

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{21}}{4}\times\sqrt{5}\right)\times\sqrt{\frac{27}{35}} \\ &= \frac{1}{24}\sqrt{\frac{3\times 7\times 5\times 27}{35}} \\ &= \frac{\sqrt{81}}{24} = \frac{9}{24} \qquad\qquad = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Conclusion : le volume du tétraèdre $MNPF$ est $\frac{3}{8}$ (unité de volume).