

**Exercice - M0179**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  ( $f \in \mathcal{L}(E)$ ) tel que  $f \circ f = -f$ .

1. Expliciter  $f$  dans le cas où  $f$  est bijective.
2. On suppose maintenant que  $f$  est non nulle et n'est pas bijective. Montrer que

$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$

3. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad f^k = \lambda_k f$$

Expliciter  $\lambda_k$ .

4. On pose  $g = f + \operatorname{Id}_E$ . Exprimer  $g^n$  en fonction de  $f$  et  $\operatorname{Id}_E$ .