

Exercice - M0179

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel et f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) tel que $f \circ f = -f$.

1. Expliciter f dans le cas où f est bijective.
2. On suppose maintenant que f est non nulle et n'est pas bijective. Montrer que

$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$

3. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \quad f^k = \lambda_k f$$

Expliciter λ_k .

4. On pose $g = f + \operatorname{Id}_E$. Exprimer g^n en fonction de f et Id_E .