**Exercice - M0179C**

**1)** On se place dans le cas ou $f$ est bijective. Par définition de $f$ nous avons

$$\forall x \in E \qquad f \circ f(x) = -f(x)$$

Egalité qui se réécrit

$$\forall x \in E \qquad f\left(f(x)\right) = f(-x)$$

$f$ étant bijective, elle est injective, donc

$$f\left(f(x)\right) = f(-x) \implies f(x) = -x$$

Conclusion : dans le cas $f$ bijectif, nous avons explicité $f$

$$\forall x \in E \qquad f(x) = -x$$

**2)** Nous avons

$$\forall x \in E \qquad f \circ f(x) = -f(x)$$

Autrement dit

$$\forall x \in E \qquad f \circ f(x) + f(x) = 0$$

et

$$\forall x \in E \qquad f\left(f(x) + x\right) = 0$$

Donc

$$\forall x \in E \qquad f(x) + x \in \ker f$$

Or

$$\forall x \in E \qquad x = f(x) + x - f(x)$$

C'est bien la somme d'un vecteur de de $\text{Im } f$ et d'un vecteur de $\ker f$ puis que

$$\forall x \in E \quad f(x) \in \text{Im } f \qquad \text{et} \qquad f(x) + x \in \ker f$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Montrons que l'intersection de l'image et du noyau de $f$ est réduite au vecteur nul.

$$y \in \text{Im } f \cap \ker f \iff f(y) = 0 \text{ et } \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Nous en déduisons

$$f(y) = f\left(f(x)\right) = f \circ f(x) = -f(x) = f(-x) = 0$$

Donc

$$f(x) = 0$$

et donc

$$y = 0$$

Finalement

$$\text{Im } f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$$

Conclusion : la somme est directe et nous avons

$$E = \text{Im } f \oplus \ker f$$

**3)** Procédons par réccurence. Nous avons déja de façon triviale

$$f = f \qquad \text{et} \qquad f^2 = -f$$

La propriété est donc vérifié pour $k = 1$ et $k = 2$. Supposons que

$$f^k = \lambda_k f$$

Montrons que

$$f^{k+1} = \lambda_{k+1} f$$

$$\begin{aligned} f^{k+1} &= f \circ f^k \\ &= f \circ (\lambda_k f) \\ &= \lambda_k f \circ f \\ &= (-\lambda_k) f \end{aligned}$$

Donc nous avons bien

$$f^{k+1} = \lambda_{k+1} f \qquad \lambda_{k+1} = -\lambda_k$$

et donc

$$\forall in \in \mathbb{N}^\star \qquad f^n = \lambda_n f$$

La suite $(\lambda_k)$ est donc une suite géométrique de raison -1, d'ou

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star \qquad \lambda_k = \lambda_1 (-1)^{k-1} = (-1)^{k-1}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad f^n = (-1)^{n-1} f$$

**4)** Posons $g = f + \mathrm{Id}_E$. Calculons $g^n$

$$\begin{aligned} g^n &= (f + \mathrm{Id}_E))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k \mathrm{Id}_E^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^k + \mathrm{Id}_E \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} f + \mathrm{Id}_E \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} (-1)^{k-1} \right) f + \mathrm{Id}_E \\ &= -\left( \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^k \cdot 1^{n-k} \right) f + \mathrm{Id}_E \\ &= -\left( \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \cdot 1^{n-k} - 1 \right) f + \mathrm{Id}_E \\ &= -\left((-1+1)^n - 1\right) f + \mathrm{Id}_E \\ &= -(0^n - 1) f + \mathrm{Id}_E \\ &= f + \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad g^n = f + \mathrm{Id}_E$$