Exercice - M0180C

Soit E un ensemble, f une application de E dans E et A un sous ensemble de E. On définit les sous ensembles de E suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = f^n(A) \qquad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

1) Montrons que $f(B) \subset B$.

$$\forall y \in E \qquad y \in f(B) \implies \exists x \in B \qquad f(x) = y$$

$$x \in B \implies x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad x \in A_{n_0}$$

Or

$$x \in A_{n_0} \implies f(x) \in f(A_{n_0}) \implies x \in A_{n_0+1} \implies f(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \implies f(x) \in B$$

En résumé

$$\forall y \in E \qquad y \in f(B) \implies y \in B$$

Conclusion

$$f(B) \subset B$$

2)) Montrons que B est la plus petite partie E stable par f contenant A. Soit S une partie de E stable par f et contenant A

$$A \subset S \subset E \qquad \text{et} \qquad f(S) \subset S$$

Pour tout n, A_n est inclus dans S en effet

$$A \subset S \implies A_0 \subset S$$

Supposons que $A_n \subset S$

$$A_n \subset S \implies f(A_n) \subset f(S) \implies A_{n+1} \subset f(S) \subset S$$

donc

$$A_{n+1} \subset S$$

On en déduit par une réccurence immédiate que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A_n \subset S$$

et donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset S$$

Autrement dit, toute partie de E stable par f et contenant A contient B. Or B est une partie stable d'après la question 1), donc c'est la plus petite.

Conclusion : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n = f^n(A)$ est la plus petite partie de E stable par f et contenant A