Exercice - M0181

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle, c'est-à-dire tel que OA,OB et OC soient deux à deux perpendiculaires. On pose $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$.

1. Montrer que les arrêtes opposées sont perpendiculaires.
2. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan ABC. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan OCH.
3. Soit K le point d'intersection de la droite AB avec le plan OCH. Montrer que
$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$
puis montrer que
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$
4. Exprimer de deux façons le volume du tétraèdre $OABC$
5. Montrer que le carré de l'aire du triangle ABC et égal à la somme des carrées des aires des triangles AOB, BOC et COA.
6. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de a, b et c.
7. On utilise à présent un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{OB}$ et enfin $\vec{k}$ colinéaire à $\overrightarrow{OC}$. On considère le point H' de coordonnées (a, b, c). Donner l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à OH' et passant par H'.
8. Déterminer les points d'intersections A', B' et C' du plan $\mathcal{P}$ avec les axes $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$ respectivement.
9. Retrouver analytiquement que
$$\frac{1}{OH'^2} = \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2}$$