Exercice - M0182C

1) Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C, D.

$$\begin{aligned}(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a) &= bd-bc-ad+ac+cd-ac-bd+ab \\ &= -bc-ad+cd+ab \\ &= d(c-a)+b(a-c) \\ &= d(c-a)-b(c-a- \\ &= (d-b)(c-a)\end{aligned}$$

Donc

$$(d-b)(c-a) = (b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)$$

En prenant le module, il vient

$$|(d-b)(c-a)| = |(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)|$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|(d-b)|\cdot|(c-a)| \leq |(b-a)(d-c)|+|(c-b)(d-a)|$$

Et finalement

$$BD\cdot AC \leq AB\cdot CD+BC\cdot AD$$

2) En cas d'égalité nous avons

$$|(d-b)|\cdot|(c-a)| = |(b-a)(d-c)|+|(c-b)(d-a)|$$

et donc

$$|(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)| = |(b-a)(d-c)|+|(c-b)(d-a)|$$

Or, pour tout nombre complexe z et z' on a

$$|z+z'| \leq |z|+|z'|$$

avecégalité si et seulement si $\arg z = \arg z'$. Donc

$$|(b-a)(d-c)+(c-b)(d-a)| = |(b-a)(d-c)|+|(c-b)(d-a)| \iff \arg(b-a)(d-c) = \arg(c-b)(d-a)$$

Si tous les points sont distincts

$$(b-a)(d-c)| \neq 0$$

et donc

$$\arg(c-b)(d-a)-\arg(b-a)(d-c) = \iff \arg\frac{(c-b)(d-a)}{(b-a)(d-c)} = 0$$

Donc

$$\frac{(c-b)(d-a)}{(b-a)(d-c)} \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\frac{(c-b)(d-a)}{(b-a)(d-c)} = \lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Finalement

$$\frac{d-a}{b-a} = \lambda\frac{d-c}{c-b}$$

Ce qui correspond à la condition de cocyclicité des points A, B, C, D.