Exercice - M0183C

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 = 0 \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1) Posons $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$, et montrons que (v_n) est une suite géométrique. Commençons par calculer v_0.

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{\dfrac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\dfrac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n + 4}} \\
&= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} \\
&= \frac{1}{5}\frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\
&= \frac{1}{5}v_n
\end{aligned}$$

Conclusion : (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$ et de raison $\dfrac{1}{5}$

2) (v_n) étant une suite géomt́rique nous pouvons exprimer v_n en fonction de v_0 et de la raison.

$$v_n = -\frac{1}{3}\frac{1}{5^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exprimons u_n en fonction de v_n.

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\
\iff v_n(u_n + 3) &= u_n - 1 \\
\iff v_n u_n - u_n &= -1 - 3v_n \\
\iff u_n(v_n - 1) &= -1 - 3v_n \\
\iff u_n &= \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$u_n = \frac{1 + 3 \times \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{1}{5^n}}{1 - \dfrac{-1}{3}\dfrac{1}{5^n}} = \frac{3 \cdot 5^n - 3}{3 \cdot 5^n + 1}$$

Conclusion : la suite (u_n) est également définie par la formule explicite

$$u_0 = 0 \qquad u_n = \frac{3 \cdot 5^n - 3}{3 \cdot 5^n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) (v_n) est une suite géométrique de raison inférieure à 1. Elle converge donc vers zéro.

$$\lim_{n \to \infty} v_n = 0$$

Nous en déduisons la limite de (u_n) en utilisant les règles de calcul sur les limites

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1 + 3 \lim\limits_{n \to \infty} v_n}{1 - \lim\limits_{n \to \infty} v_n} = \frac{1}{1}$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 1$$