

**Exercice - M0186**

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier  $n$  non nul, par :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

1. Exprimer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
2. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$$

3. Etudier la convergence des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par :

$$v_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n}{n + 1}$$

4. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.