Exercice - M0186C

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n non nul, par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) Calculons u_1, u_2 et u_3.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \\
u_2 &= \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}+3}{6+3\sqrt{2}} \\
&= \frac{(5+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6^2-3^2\times 2} = \frac{30-15\sqrt{2}+6\sqrt{2}-6}{18} \\
&= \frac{24-9\sqrt{2}}{18} \\
&= \frac{8-3\sqrt{2}}{6} \\
u_3 &= \frac{1}{3+\sqrt{1}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} \\
&= \frac{(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{3}) + 4(3+\sqrt{3}) + 4(2+\sqrt{2})}{4(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})} \\
&= \frac{[(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{3}) + 4(3+\sqrt{3}) + 4(2+\sqrt{2})](3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{4(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})} \\
&= \frac{(9+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}+12+4\sqrt{3}+12+4\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{4(3^2-\sqrt{2}^2)(3^2-\sqrt{3}^2)} \\
&= \frac{(33+7\sqrt{2}+7\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3})(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{4\times 7\times 6} \\
&= \frac{(99+21\sqrt{2}+21\sqrt{3}+3\sqrt{2}\sqrt{3}-33\sqrt{2}-14-7\sqrt{2}\sqrt{3}-2\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{168} \\
&= \frac{(85-12\sqrt{2}+19\sqrt{3}-4\sqrt{2}\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{168} \\
&= \frac{255-36\sqrt{2}+57\sqrt{3}-12\sqrt{2}\sqrt{3}-85\sqrt{3}+12\sqrt{2}\sqrt{3}-57+12\sqrt{2}}{168} \\
&= \frac{198-24\sqrt{2}-28\sqrt{3}}{168} \\
&= \frac{99-12\sqrt{2}-14\sqrt{3}}{84}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{8-3\sqrt{2}}{6} \qquad u_3 = \frac{99-12\sqrt{2}-14\sqrt{3}}{84}}$$

2) Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$$

Soit i un entier naturel compris entre 1 et n. Nous avons :

$$1 \leq i \leq n$$

La fonction racine est croissante donc

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{i} \leq \sqrt{n}$$

et donc

$$n+\sqrt{1} \leq n+\sqrt{i} \leq n+\sqrt{n}$$

En inversant les expressions, nous obtenons

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{i}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{1}} \qquad \forall i \in \{1,2,\cdots,n\}$$

On en déduits en additionnant membre à membre toutes les inégalités

$$\sum_{i-1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \sum_{i-1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}} \leq \sum_{i-1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$

et donc

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\star} \qquad \frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}}$$

3) Etudions la convergence des suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$v_n = \frac{n}{n+\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n}{n+1}$$

Nous avons

$$v_n = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n\left(1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Sous cette forme la limite est immédiate.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

De la même façon, nous avons

$$w_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} w_n = 1$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = 0}$$

4) Montrons que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. L'inégalité obtenue à la question 2) s'écrit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star} \qquad v_n \leq u_n \leq w_n$$

Les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et ont la même limite. D'apès le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente est sa limite est 1.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}} = 1}$$