Exercice - M0188C

1) Calculons les premiers nombres de Fermat définis par $F_n = 2^{2^n} + 1$

$$F_0 = 3 \qquad F_1 = 5 \qquad F_2 = 17 \qquad F_3 = 257 \qquad F_4 = 65\ 537$$

2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $F_{n+1} - 1 = (F_n - 1)^2$

$$(F_n - 1)^2 = \left(2^{2^n} + 1 - 1\right)^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2\times 2^n} = 2^{2^{n+1}} = F_{n+1} - 1$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_{n+1} - 1 = (F_n - 1)^2$$

3) Montrons par réccurence que pour tout entier $n \geq 1$, le dernier chiffre de F_n est un 7.

Pour $n = 2$ $F_2 = 17$. Le dernier chiffre est bien un 7, la propriété et vérifiée.

Supposons que le dernier chiffre de F_n est un 7, montrons que le dernier chiffre de F_{n+1} est un 7. D'après la question 2)

$$F_{n+1} = (F_n - 1)^1 + 1$$

Si F_n se termine par 7, cela signifie que $F_n = 10q + 7$ avec $q \in \mathbb{N}$. Donc

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= (10q + 7 - 1)^2 + 1 \\ &= (10q + 6)^2 + 1 \\ &= 100q^2 + 120q + 36 + 1 \\ &= 100q^2 + 120q + 30 + 7 \\ &= 10(10q^2 + 12q + 3) + 7 \end{aligned}$$

Donc $F_{n+1} = 10q' + 7$ avec $q' = 10q^2 + 12q + 3$. Le dernier chiffre est donc bien un 7.

Conclusion ; pour tout entier naturel $n \geq 2$ le dernier chiffre de F_n est un 7.