

Exercice - M0193

On muni le plan d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe $a = 5 + 5i$, B celui d'affixe $b = 5 - 5i$ et P celui d'affixe $p = 10$. On considère un point M , distinct de O , d'affixe z . U est le point d'affixe u tel que $u = i(10 - z)$ et T celui d'affixe t tel que $t = i(z - 10)$. Enfin, D est le symétrique du point M par rapport à O .

Construire le repère et placer les points. (on pourra placer M avec une affixe $z = 7 + 2i$)

1. Démontrer que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O .
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0$
(on écrira $z = x + iy$ où x et y sont deux réels)

Justifier que le quadrilatère $OAPB$ est inscrit dans Γ .

3. On suppose que le point M est distinct de O , A et P . Les points O , M et U sont donc distincts deux à deux.
 - a) Démontrer que les points O , M et U sont alignés si et seulement si $\frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}}$
(on s'aidera des rappels)
 - b) Démontrer que les points O , M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O . Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{u}{z}$ soit imaginaire pur
(on s'aidera des rappels)

En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P .

6. Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.
représenter cette situation sur la figure

Rappels :

a est un nombre réel ssi $a = \bar{a}$

a est un nombre imaginaire pur ssi $a = -\bar{a}$