Exercice - M0197C

1) Calculons le PGCD de $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$ pour différentes valeurs de n

a) Cas $n = 1$.

$$a = 7 \qquad b = 7 \implies PGCD(a, b) = 7$$

b) Cas $n = 11$

$$a = 4 \times 11 + 3 = 47 \qquad b = 5 \times 11 + 2 = 57 \implies PCDD(a, b) = 1$$

a est un nombre premier et a ne divise pas b.

c) Cas $n = 15$

$$a = 4 \times 15 + 3 = 63 = 3^3 \cdot 7 \qquad b = 5 \times 15 + 2 = 77 = 7 \cdot 11 \implies PGCD(a, b) = 7$$

2) Calculons la combinaison linéaire de a et b suivante : $5a - 4b$

$$5a - 4b = 5(4n + 3) - 4(5n + 2) = 20n + 15 - 20n - 8 = 7$$

d étant le PGCD de a et b, d est un diviseur commun de a et b et donc d divise tout combinaison linéaire de a et b. En particulier d divise $5a - 4b$ donc d divise 7. Les valeurs possibles de d sont donc 1 et 7 nécessairement.

Conclusion : le PGCD de a et b est nécessairement 1 ou 7

3a) Déterminons les entiers n et k tels que $4n + 3 = 7k$. En prenant les valeurs successives de k, on obtient

k	$4n + 3 = 7k$	n
1	7	1
2	14	$-$
3	21	$-$
4	28	$-$
5	35	8

On conjecture que $k = 4q + 1$ et $n = 7q + 1$. On vérifie aisément que cette solution convient

$$4n + 3 = 4(7q + 1) + 3 = 7 \times 4q + 7 = 7(4q + 1) = 7k$$

Conclusion

$$k = 4q + 1 \qquad n = 7q + 1 \qquad q \in \shortparallel \in \mathbb{N}$$

3B) Déterminons les entiers n et k tels que $5n + 2 = 7k$. En procédant de même, on peut écrire $n = 7q + 1$. Il vient alors

$$5n + 2 = 5(7q + r) + 2 = 7 \times 5q + 5 + 2 = 7(5q + 1)$$

Et donc, les valeurs de k et n sont

$$k = 5q + 1 \qquad n = 7q + 1 \qquad q \in \mathbb{N}$$

4) Soit r le reste de la division de n par 7. Autrement dit $n = 7q + r$. Cherchons les valeurs de r pour lesquels $d = 7$. Nous avons

$$4n + 3 = 4(7q + r) + 3 = 28n + 4r + 3 = 7 \times 4q + (4r + 3)$$
$$5n + 2 = 5(7q + r) + 2 = 7 \times 5q + 5r + 2$$

$4r + 3$ et $5n + 2$ ne sont divisible par 7 que pour $r = 1$, comme nous pouvons le vérifier dans le tableau ci-dessous.

r	0	1	2	3	4	5	6
$4n + 3$	3	7	11	15	19	23	27
$5n + 2$	2	7	12	17	22	27	32

Ainsi pour $r = 1$, divise a et b, ce que nous savions déjà d'après la question 3), et c'est la seule possibilité, puisque dans tous les autres cas, a et b ne seront pas divisible par 7.

Conclusion : le PGCD de $a = 4n + 3$ et $n = 5n + 2$ est 7 si et seulement si $n = 7k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. On retrouve alors les valeurs $n = 1$ et $n = 15$ de la première question obtenues respectivement pour $k = 1$ et $k = 2$.