Exercice - M0200

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ *d'unité graphique 1 cm.*

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z^2$$

1. Déterminer l'ensemble (K) des points M du plan invariants par f.
   (C'est-à-dire tels que : $f(M) = M$*).*
2. Soit A le point d'affixe $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.
   a) Exprimer a sous forme exponentielle.
   b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
   (les antécédents de A *par* f *sont les points qui ont pour image par* f *le point* A*)*
3. Déterminer l'ensemble (L) des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4. Soit M un point d'affixe z
   N.B. : *les questions* **a,b** *et* **c** *peuvent être traitées indépendamment.*
   a) Exprimer OM' en fonction de OM.
   En déduire l'ensemble (P) des points M distincts de O tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O.
   b) On note P le point d'affixe 1. Prouver que :
   $$MM' = OM \times PM$$
   En déduire l'ensemble (S) des points M tels que le triangle OMM' soit isocèle en M.
   c) Si M est disctinct de O, montrer que :
   $$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = 2(\vec{u};\overrightarrow{OM}) \quad [2\pi]$$
   En déduire l'ensemble (T) des points M disctincts de O tels que O, M et M' soient alignés.