Exercice - M0200C

1) M invariant par f signifie $f(M) = M$, ce qui se traduit par

$$z' = z \iff z^2 = z \iff z^2 - z = 0 \iff z(z-1) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z = 1$$

Conclusion :

$$K = \{M; \quad M \in \mathcal{P} \quad M(0;0) \text{ ou } M(1;0)\}$$

2a) A est le point d'affixe $a = -2 + 2i\sqrt{3}$

$$a = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Conclusion :

$$a = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

2b) On cherche $x \in \mathbb{C}$ tel que $x^2 = a$. Posons $x = re^{i\theta}$. Il vient

$$x^2 = a \iff r^2e^{i2\theta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} \iff r^2 = 4 \text{ et } 2\theta = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

d'ou

$$r = 2 \qquad \theta = \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$$

Les antécédents sont :

$$x_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad x_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

3) On cherche les nombres complexes z tels que z' soit imaginaire pur. On a $z' = z^2$ et z' imaginaire pur, donc

$$z' = r'e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ou} z' = r'e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Posons $z = re^{i\theta}$. Il vient

$$z^2 = r^2e^{i2\theta}$$

On en déduit

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

et donc

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Conclusion :

$$L = \{z; z = \frac{pi}{4} + k\frac{pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

4a) On a $OM' = |z'|$ et $OM = |z|$ donc

$$OM' = |z'| = |z^2| = |z|^2 = OM^2$$

Conclusion :

$$OM' = OM^2$$

Si M et M' sont sur un même cercle de centre O alors $OM = OM'$. Il vient

$$OM^2 = OM \Rightarrow OM = 0 \quad \text{ou} \quad OM = 1$$

On exclue le cas cas $OM = 0$ puisque $M \neq O$. P est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

4b) Soit P le point d'affixe 1. Montrons que $MM' = OM \times PM$.

$$MM' = |z' - z| = |z^2 - z| = |z||z-1| = OM \times PM$$

Conclusion :

$$MM' = OM \times PM$$

OMM' isocèle en M signifie que $OM = MM'$ donc $PM = 1$. On en déduit que S est le cercle de centre P et de rayon 1.

4b) On a

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \arg z' \qquad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg z$$

or $z' = z^2$ donc

$$\arg z' = 2 \arg z \pmod{2\pi}$$

Conclusion :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 2(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$$

S est l'ensemble des réels non nuls.