Exercice - M0202C

ABC est un triangle. On définit les points

- I le mileu de $[AB]$
- J tel que $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JA}$
- K tel que $\overrightarrow{KB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{KC}$

Montrons que les points $I, , J$ et K sont alignés. Nous avons

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Car I est le milieu du segment $[AB]$. Nous avons également

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AJ} \implies \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$$

Enfin

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC})$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\iff &\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\iff &\frac{3}{2}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\iff &\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

En résumé

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Nous avons alors

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

et

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Et donc

$$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, les points I, J et K sont alignés.