Exercice - M0203C

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_1 = 1 \qquad u_{n+1} = 1 + \prod_{k=1}^{n} u_k$$

1) Déterminons la limite de la suite (u_n).

Calculons les premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned}
&u_1 = 1\\
&u_2 = 1 + u_1 = 1 + 1 = 2\\
&u_3 = 1 + u_1u_2 = 1 + 1 \times 2 = 1 + 2 = 3\\
&u_4 = 1 + u_1u_2u_3 = 1 + 1 \times 2 \times 3 = 1 + 6 = 7\\
&u_5 = 1 + u_1u_2u_3u_4 = 1 + 1 \times 2 \times 3 \times 7 = 1 + 42 = 43
\end{aligned}$$

La suite semble croissante et la valeur des termes u_n semble augmenter rapidement. Montrons par réccurence que :

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n \geq n$$

Pour $n = 1$, la propriété est vérifiée puisque $u_1 = 1$. Supposons que $u_k \geq k \ \forall k \leq n$. Montrons que $u_{n+1} \geq n + 1$.

$$u_{n+1} = 1 + u_1u_2 \cdots u_n$$

Or

$$\forall k \leq n \qquad u_k \geq 1 \geq 1$$

donc

$$u_{n+1} = 1 + u_1u_2 \cdots u_n \geq 1 + 1 \times 1 \times 1 \times n = n + 1$$

Nous pouvons donc conclure que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq n$. Nous en déduisons immédiatement la limite de la suite (u_n) (théorème de comparaison).

$$\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$$

2) Calculons la limite de la somme (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$$

$$u_{n+1} = 1 + u_1u_2 \cdots u_{n-1}u_n \implies \frac{u_{n+1} - 1}{u_n} = u_1u_2 \cdots u_{n-1} = u_n - 1$$

Il vient alors

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_n} = u_n - 1 \implies \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u_n} &= \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\\
&= \frac{u_n}{u_1u_2 \cdots u_{n-1}u_n} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\\
&= \frac{1}{u_1u_2 \cdots u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\\
&= \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

Donc, nous avons une somme télescopique puisque

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

Il vient alors

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \\
&= \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\
&= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}
\end{aligned}
$$

Conclusion

$$
\forall n \geq 1 \qquad S_n = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = 2
$$