Exercice - M0208C

Recherchons les nombres complexes z tels que

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$$

Utilisons la première égalité.

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = |z| \implies |z|^2 = 1 \implies |z| = 1$$

z est donc un nombre complexe de module 1, son image est sur le cercle trigonométrique. Utilisons la deuxième égalité

$$|z| = |1-z| \implies z\bar{z} = (1-z)\overline{1-z} = (1-z)(1-\bar{z})$$

Il vient

$$z\bar{z} = 1 - z - \bar{z} + z\bar{z} \implies z + \bar{z} = 1 \implies \Re z = \frac{1}{2}$$

Alternativement on peut écrire

$$|1-z| = |1-x-iy| == \sqrt{(1-x)^2+y^2} = |z| = 1$$

donc

$$(1-x)^2 + y^2 1 - 2x + x^2 + y^2 = 1 \implies 2x = x^2 + y^2 = 1 \implies x = \frac{1}{2}$$

z est donc un nombre complexe de module 1 et de partie réel égale à $\frac{1}{2}$. Il vient

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \implies y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion :

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$