Exercice - M0209C

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = xe^x - x + 2$$

1) Etudions la fonction f. Calculons la dérivée.

$$f'(x) = e^x + xe^x - 1 = e^x(x+1) - 1$$

Conclusion

$$f'(x) = e^x(x+1) - 1$$

Etudions le signe de la dérivée. On a évidement

$$f'(0) = e^0(0+1) - 1 = 0$$

Par ailleurs

$$x \geq 0 \implies x + 1 \geq 1$$

Or

$$\forall x \geq 0 \qquad e^x \geq 1$$

Donc

$$e^x(x+1) \geq 1$$

et donc

$$e^x(x+1) - 1 \geq 0$$

Autrement dit

$$x \geq 0 \implies f'(x) \geq 0$$

Analysons la situation pour $x \geq 0$

$$x \leq 0 \implies x + 1 \leq 1 \quad \text{et} \quad e^x \leq 1 \implies e^x(x+1) \leq 1 \implies e^x(x+1) - 1 \leq 0$$

Autrement dit

$$x \leq 0 \implies f'(x) \leq 0$$

Etudions les limites. En plus l'infini, nous avons immédiatement

$$\lim_{x \to +\infty} e^x(x+1) - 1 = +\infty$$

En moins l'infini, nous avons

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x - x + 2 = +\infty$$

Calculons enfin l'image de 0

$$f(0) = 0 \times e^0 - 0 + 2 = 2$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour dresser le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2 \mid 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Montrons que l'équation $f(x) = 3$ exactement deux solutions. L'analyse du tableau de variation permet de conclure immédiatement. Justifions néanmoins le résultat.

Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$

- La fonction f est continue car dérivable
- La fonction f est strictement décroissante
- $3 \in [2; +\infty[$

D'après le théorème de la bijection (encore appelé corrolaire du théorème des valeurs intermédiares), il existe une unique valeur α appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$ telle que $f(\alpha) = 3$. Une table de valeur permet d'obtenir une valeur approchée de α

$$1,349 \leq \alpha \leq 1,35$$

Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$

- La fonction f est continue car dérivable
- La fonction f est strictement croissante
- $3 \in [2; +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, il existe une unique valeur β appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que $f(\beta) = 3$. Une table de valeur permet d'obtenir une valeur approchée de β

$$0,806 \leq \beta \leq 0,807$$

Conclusion : l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions.