**Exercice - M0212**

Pour une certaine mise, un joueur reçoit 1 jeton, puis il effectue une suite de lancers indépendant d'une pièce supposée équilibrée. A chaque lancer, quand « pile sort », il gagne un nouveau jeton. De plus, la règle prévoit que :

- Si au lancer $n$, le joueur perd son dernier jeton, il gagne automatiquement un jeton au lancer suivant quelle qu'en soit l'issue pour que le jeu puisse se poursuivre.
- Si au lancer $n$, le joueur est en possession de 3 jetons, les lancers se poursuivent mais son compte est bloqué à « 3 jetons ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $k$ tel que $0 \leq k \leq 3$, on note $p_k(n)$ la probabilité qu'apès $n$ lancer, le joueur possède $k$ jetons (on dit que son compte est à $k$).

1. Donner la probabilité $p_n(0), p_n(1), p_n(2)$ et $p_n(3)$ pour $n = 0$, pour $n = 1$, pour pour $n = 2$ (on pourra s'aider d'un arbre de probabilté).

   Illustrer par un arbre de probabilité l'évolution de la situation entre le lancer $n$ et le lancer $n + 1$.

   b) En déduire les expressions de $p_{n+1}(0), p_{n+1}(1), p_{n+1}(2)$ et $Pn + 1(3)$ en fonction de $p_n(0), p_n(1), p_n(2)$ et $p_n(3)$.

2. **Partie 2 : représentation matricielle**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n$ la matrice $X_n = \begin{pmatrix} p_n(0) \\ p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}$

   a) Préciser $X_0$

   b) Montrer qu'il existe une matrice carrée $A$ d'ordre 4 tell que l'on ait pour tout entier naturel $n$ non nul : $X_{n+1} = AX_n$. Expliciter $A$.

   c) En déduire, pour $n$ entier naturel, une expression de $X_n$ en fonction de $A, n$ et $X_0$.

3. **Calcul de $A^n$ et de $X_n$**

   On considère la matrice auxilliaire

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}$$

   a) Calculer les matrices $B^3$ et $B^5$ à la calculatrice ou avec un logiciel et montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme $B^3 = \alpha B$ et $B^5 = \alpha^2 B$ où $\alpha$ est un réel à préciser (l'ecrir sous forme fractionnaire).

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^{2n+1} = \alpha^n B$.

   c) En déduire $B^n$ pour toutes les valeurs de $n$.

   d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels $a_n, b_n$ et $c_n$ tels que :

   $$A^n = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B^n & & 0 \\ & & & 0 \\ a_n & b_n & c_n & 1 \end{pmatrix}$$

4. En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$ (on distinguera 2 cas suivant la parité de $n$).

5. Donner une expression de $X_n$ en fonction de $n$.