Exercice - M0223C

La fonction g est définie sur $]-3;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{7x - 2\sin x}{x+3}$$

1) Montrons que

$$\forall x > -3 \qquad \frac{7x-2}{x+3} \leq g(x) \leq \frac{7x+2}{x+3}$$

Nous avons pour tout $x > -3$, et $x + 3 > 0$

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \sin x \leq 1 \\
2 &\geq -2\sin x \geq -2 \\
-2 &\leq -2\sin x \leq 2 \\
7x - 2 &\leq 7x - 2\sin x \leq 7x + 2 \\
\frac{7x-2}{x+3} &\leq \frac{7x - 2\sin x}{x+3} \leq \frac{7x+2}{x+3}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall x > -3 \qquad \frac{7x-2}{x+3} \leq g(x) \leq \frac{7x+2}{x+3}$$

2) Calculons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x-2}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(7-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} 7 - \frac{2}{x} = 7 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$$

Finalement

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x-2}{x+3} = 7$$

On montre de même que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x+2}{x+3} = 7$$

Remarque : on peut également utiliser le théorème sur les fraction rationnelle qui dit que la limite d'une fraction rationnelle en plus l'infini (ou moins l'infini) est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré c'est-à-dire $\dfrac{7x}{x}$ dans le cas présent.

Nous en déduisons immédiatement la limite de g. En effet, d'après le théorème des gendarmes nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x - 2\sin x}{x+3} = 7$$