Exercice - M0224C

1) Calculons
$$\lim_{x\to-\infty} x^3-4x^2+7x-12$$
Les monones de degré supérieur ou égale à 1 ont pour limite plus ou moins l'infini selon le signe du coefficient. Autrement dit nous avons une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. Mettons en facteur le terme de plus haut degré. Il vient
$$\lim_{x\to-\infty} x^3-4x^2+7x-12=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{12}{x^3}\right)$$
Or
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$
donc
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{12}{x^3}\right)=1$$
Par ailleur, nous avons une puissance impaire, donc
$$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$
On en déduit immédiatement la limite du produit.
$$\lim_{x\to-\infty} x^3-4x^2+7x-12=-\infty$$
Remarque : on peut également utiliser le théorème suivant : la limite d'un polynome à l'infini est égale à la limite de sont terme de plus haut degré.

2) Calculons
$$\lim_{x\to5^+}\sqrt{\frac{x+8}{x-5}}$$
Nous avons
$$\lim_{x\to5^+} x+8=13 \qquad \lim_{x\to5^+} x-5=0^+$$
et donc
$$\lim_{x\to5^+}\frac{x+8}{x-5}=+\infty$$
Or
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$
Donc par composition
$$\lim_{x\to5^+}\sqrt{\frac{x+8}{x-5}}=+\infty$$
3) Calculons
$$\lim_{x\to7}\frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4}$$
Avec des radicaux, l'expression conjuguée est toujours une bonne idée à tenter.
$$\begin{aligned}\frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4}&=\frac{(x-7)(\sqrt{x+9}+4)}{(\sqrt{x+9}-4)(\sqrt{x+9}+4)}\\&=\frac{(x-7)(\sqrt{x+9}+4)}{x+9-16}\\&=\frac{(x-7)(\sqrt{x+9}+4)}{x-7}\\&=\sqrt{x+9}+4\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = \lim_{x\to 7} \sqrt{x+9}+4$$

Et donc

$$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = \sqrt{7+9}+4 = \sqrt{16}+4 = 4+4 = 8$$

Conclusion

$$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+9}-4} = 8$$