Exercice - M0226C

1) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;3]$. Procédons par réccurence. Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc u_0 appartient à l'intervalle $[0;3]$. Supposons que $u_n \in [0;3]$, montrons qu'il en est de même pour u_{n+1}.

$$0 \leq u_n \leq 3$$

$$3 \leq u_n + 6 \leq 6$$

et comme la fonction racine est croissante

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{6}$$

et donc, comme $\sqrt{6} < 3$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq 3 \qquad\qquad u_n \in [0;3]$$

2a) Montrons que la suite (u_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leq u_{n+1}$. Nous pouvons à nouveau procéder par réccurence. Pour $n = 0$, nous avons $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6}$ donc $u_0 \leq u_1$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$, montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

$$u_n \leq u_{n+1} \implies u_n + 6 \leq u_{n+1} + 6 \implies \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{u_{n+1} + 6} \implies u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. Autrement dit la suite (u_n) est croissante.

2b) La suite (u_n) est croissante majorée, elle est donc convergente. Sa limite ℓ vérifie les égalités suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 6}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} u_n + 6}$$
$$\ell = \sqrt{\ell + 6}$$

On en déduit que ℓ est solution de l'équation

$$x^2 - x - 6 = 0$$

dont les solutions sont -2 et 3. Les termes de la suite (u_n) étant compris entre 0 et 3, la limite est donc 3.

Conclusion : la suite (u_n) est convergente et sa limite est 3.

3a) Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$$

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$. Nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$$

Or

$$6 \leq x \leq 3 \implies 3 \leq x + 6 \leq 9 \implies \implies 2\sqrt{6} \leq 2\sqrt{x+6} \leq 6 \implies \frac{1}{2\sqrt{6}} \geq f'(x) \geq \frac{1}{6}$$

Donc

$$\forall x \in [0;3] \qquad f'(x) \leq \frac{1}{3}$$

Nous pouvons appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n;3]$ et donc

$$f(3) - f(u_n) \leq \sup_{x\in[0;3]} f'(x)(3 - u_n)$$

et compte tenu de $u_n \leq 3$ et $f(3) = 3$

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$$

3b) Montrons par une réccurence immédiate que

$$\forall \in \mathbb{N} \qquad |u_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$$

Pour $n = 0$, nous avons bien $|u_0 - 3| = 3 \leq \frac{1}{3^{-1}} = 3$. Supposons que

$$|u_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$$

montrons que

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3^n}$$

Or

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3| \leq \frac{1}{3}\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n - 3| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$$

On retrouve évidement le résultat de la question **2b)** en passant à la limite.

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} |u_n - 3| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

et donc, en utilisant les résultats des limites sur les suites géométrique de raison comprise en 0 et 1, nous obtenons

$$0 \leq |\lim_{n \to +\infty} u_n - 3| \leq 0$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - 3 = 0$$

Conclusion

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$$