Exercice - M0229C

(a_n) est une suite de réels à termes positifs. Nous étudions la série $\sum \dfrac{a_n}{(S_n)^\alpha}$, avec $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$.

Supposons que la série $\sum a_n$ converge. La suite des sommes partielles (S_n) a donc une limite que nous notons ℓ.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Nous en déduisons, d'une part, que la suite (a_n) converge vers zéro et d'autre part, un équivalent du terme général de la série

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \frac{a_n}{(S_n)^\alpha} \sim \frac{a_n}{\ell^\alpha}$$

Les séries sont à termes positifs et sont donc de même nature.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\ell^\alpha} = \frac{1}{\ell^\alpha} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{1}{\ell^{\alpha-1}}$$

Supposons maintenant que la série de terme général $\sum a_n$ diverge. Afin de se faire un idée sur le comportement examinons quelques cas particuliers simples.

1) $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Nous avons alors

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$$

La série $\sum \dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ correspond donc à une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Il y a convergence dès que $\alpha > 1$.

2) $a_n = \frac{1}{n}$ Nous avons alors

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} = \frac{\dfrac{1}{n}}{\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}\right)^\alpha}$$

La série harmonique est équivalente $\ln n$ donc

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} \sim \frac{1}{n \ln^\alpha n}$$

La série est donc équivalente à une série de Bertrand. Il y a convergence pour $\alpha > 1$ et divergence sinon. Il semble donc y avoir une valeur critique de α avec convergence pour $\alpha > 1$ et divergence pour $\alpha < 1$.

Examinons le cas $\alpha = 1$. Evacuons le cas la série diverge grossièrement c'est-à-dire le cas ou le terme général ne tend pas vers 0. Nous avons donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$$

et donc

$$\frac{a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \implies 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \sim -\ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$$

Nous avons donc un équivalent du terme général de la série. Or

$$\sum_{n=1}^{N} \ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = \sum_{n=1}^{N} \ln S_{n-1} - \ln S_n = \ln S_0 - \ln S_n$$

S_N diverge donc

$$\sum \ln \frac{S_{n-1}}{S_n} \qquad \text{diverge} \implies \sum \frac{a_n}{S_n} \quad \text{diverge}$$

Examinons le cas $\alpha < 1$. La suite (S_n) diverge donc à partir d'un certain rang nous avons

$$S_n > 1 \implies S_n^\alpha \leq S_n \implies \frac{1}{S_n^\alpha} \geq \frac{1}{S_n} \implies \frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$$

$$\sum \frac{a_n}{S_n} \quad \text{diverge} \implies \sum \frac{a_n}{S_n^\alpha} \quad \text{diverge}$$

En résumé il y a divergence pour $\alpha \leq 1$.

Examinons le cas $\alpha \geq 1$. Nous avons :

$$\frac{a_n}{(S_n)^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{(S_n)^\alpha}$$

Or nous avons pour tout $\alpha > 1$

$$(S_n - S_{n-1})\frac{1}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq (S_n - S_{n-1})\frac{1}{S_{n-1}^\alpha}$$

donc

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Or

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{S_{n-1}}^{S_n} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{S_n^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}\right)$$

Il vient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_{S_0}^{S_N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{S_N^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_0^{\alpha-1}}\right)$$

Quand N tends vers l'infini on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{S_N^{\alpha-1}} = 0$$

Donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq -\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a_0^{\alpha-1}}$$

La série est à termes positifs, et la suite des sommes partielles est majorée. Il y a donc convergence.