Exercice - M0230C

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonalisable et seulement si il existe une base constituée de vecteur propre. Chercher un vecteur propre associé à la valeur propre λ, c'est trouver X non nul tel que

$$AU = \lambda U$$

Autrement dit, le système d'équation

$$AU - \lambda U = (A - \lambda I)U = 0$$

admet des solutions non nulles et donc

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Considérons le déterminant de la matrice $A - XI$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-X & 10 & \\ 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} &= (2-X)\left[(1-X)(1-X) - 1\right] \\
&= (2-X)(1 - 2X + X^2 - 1) \\
&= (2-X)(X(X-2) \\
&= -X(X-2)^2
\end{aligned}$$

Pour avoir des solutions non nulles, le déterminant doit être nul et donc λ est nécessairement solution du polynome caractéristique
$$\chi_A(X) = -X(X-2)^2$$

Autrement dit $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$.

Recherchons un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$. Nous devons donc trouver U tel que $AU = 0U$.

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \\ 2z &= 0 \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= -y \\ z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Recherchons des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 2$. Trouvons U tel que $AU = 2U$.

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x + y &= 2x \\ x + y &= 2y \\ 2z &= 2z \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} -x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \\ z &= z \end{aligned} \right.$$

Les vecteurs $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ conviennent. Nous avons ainsi trouvés trois vecteurs propres de la matrices, linéairement indépendants.

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette base, la matrice est diagonale et s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons les égalités

$$D = P^{-1}AP \qquad A = PDP^{-1}$$

Nous pouvons en effet vérifier que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$