

Exercice - M0233

Soit la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^4}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^4}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^3}{n^4}\right) = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^3}{n^4}\right)$$

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i^3}{n^4}\right)$$

En utilisant la question précédente montrer que :

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} - v_n \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{i^6}{n^8}$$

3. On rappelle que

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge et préciser sa limite.

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
5. A l'aide de la fonction `range` et d'une liste en compréhension, écrire le code python d'une fonction f de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ qui permet de créer la liste des cubes des entiers compris entre 1 et n .
6. Ecrire le code python d'une fonction `somme` qui prend en entrée une liste et qui permet de calculer la somme des éléments de cette liste.
7. Ecrire le code python d'une fonction `produit` qui prend en entrée une liste et permet de calculer le produit des éléments de cette liste.
8. Ecrire le code python d'une fonction g de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie le réel v_n . (on pourra importer la fonction `ln` du module `math`).
9. Ecrire le code python d'une fonction h de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ qui renvoie le réel u_n .