Exercice - M0235C

1) Calculons la dérivée n$^{\text{eme}}$ de
$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$
En décomposant la fraction en éléments simple il vient
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$
La linéraité de la dérivation nous donne
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-1} - \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x+1}\right)$$
Or le calcul des premières dérivées de chaque terme nous permet de conjecturer l'expression de la dérivée n$^{\text{eme}}$.
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-1} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$
Montrons cette relation par réccurence. Pour $n = 1$ nous avons
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{(-1)^1}{(x-1)^{1+1}}$$
La relations est donc vrai pour $n = 1$. Supponsons que
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x-1} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$
Montrons que
$$\frac{\mathrm{d}^{n+}1}{\mathrm{d}x^{n+1}}\frac{1}{x-1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\frac{1}{x-1} &= \frac{\mathrm{d}f^{(n)}}{\mathrm{d}x}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}\\
&= (-1)^n n!\frac{-(n+1)(x-1)^n}{(x-1)^{2n+2}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}
\end{aligned}$$
Ce qui démontre la propriété. On procède de même pour la dérivée n$^{\text{eme}}$ du deuxième terme. Nous en déduisons
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$
Ce qui s'écrit encore
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2(x^2-1)^{n+1}}\left((x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}\right)$$
2) Calculons la dérivée n$^{\text{eme}}$ de
$$f(x) = (x^2-3x+1)e^{-2x}$$
La formule de Liebniz nous donne directement
$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = &\sum_{p=1}^{n} C_n^p (x^2-3x+1)^{(p)}(e^{-2x})^{(n-p)}\\
&= (x^2-3x+1)(-2)^n e^{-2x} + n(2x-3)(-2)^{n-1}e^{-2x} + \frac{n(n-1)}{2}\times 2\times(-2)^{n-2}e^{-2x}\\
&= e^{-2x}(-2)^{n-2}\left(4(x^2-3x+1) - 2n(2x-3) + n(n-1)\right)\\
&= e^{-2x}(-2)^{n-2}\left(4x^2 - 12x + 4 + -4nx + 6nn(n-1)\right)\\
&= e^{-2x}(-2)^{n-2}\left(4x^2 - (4n+12)x + n^2 + 5n + 4\right)
\end{aligned}$$

Conclusion
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-2x}\left(2^n x - 2^n(n+3)x + 2^{n-2}(n^2+5n+5)\right)$$

3) Calculons la dérivée n$^{\text{eme}}$ de
$$f(x) = e^x \cos x$$

Calculons successivement les premières dérivée

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos x \\
f'(x) &= e^x \cos x + e^x(-\sin x) \\
&= e^x(\cos x - \sin x) \\
f''(x) &= e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\cos x - \sin x) \\
&= -2e^x \sin x \\
f^{(3)}(x) &= -2e^x \sin x + -2e^x \cos x \\
&= -2e^x(\cos x + \sin x) \\
f^{(4)}(x) &= -2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x(-\sin x + \cos x) \\
&= -4e^x \cos x
\end{aligned}$$

Donc pour résumer
$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= e^x \cos x \\
f^{(1)}(x) &= e^x(\cos x - \sin x) \\
f^{(2)}(x) &= -2e^x \sin x \\
f^{(3)}(x) &= -2e^x(\cos x + \sin x) \\
f^{(4)}(x) &= -4e^x \cos x
\end{aligned}$$

On remarque immédiatement que
$$f^{(4)}(x) = -4f(x)$$

On aura donc la relations de réccurrence suivante

$$f^{(n+4)}(x) = -4f^{(n)}(x)$$

$$\begin{aligned}
f^{(4p)}(x) &= (-4)^p e^x \cos x \\
f^{(4p+1)}(x) &= (-4)^p e^x(\cos x - \sin x) \\
f^{(4p+2)}(x) &= -2(-4)^p e^x \sin x \\
f^{(4p+3)}(x) &= -2(-4)^p e^x(\cos x + \sin x)
\end{aligned}$$

4) Calculons la dérivée n$^{\text{eme}}$ de
$$f_n(x) = x^{n-1}\ln x$$

Montrons comme il est proposé dans les conseils que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists a_n \in \mathbb{R} \qquad f_n^{(n)}(x) = -\frac{a_n}{x}$$

Procédons par réccurence. Pour $n = 1$,

$$f_1^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

La propriété est vraie et $a_1 = 1$.

Supposons que $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{x}$, montrons que $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{a_{n+1}}{x}$. On remarque que

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x)$$

Nous pouvons alors utiliser la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x f_n(x)\right) \\
&= x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) 1 f_n^{(n)}(x) \\
&= x \frac{-a_n}{x^2} + (n+1)\frac{a_n}{x} \\
&= \frac{a_n(-1+n+1)}{x}
\end{aligned}$$

Donc

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{a_{n+1}}{x} \qquad \text{avec} \qquad a_{n+1} = n a_n$$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ $\quad f_n^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{x}$ avec $a_n = (n-1)!$