Exercice - M0236C

Soit la fonction définie pour tout x strictement positif par $x^2 \ln x$. Calculons la limite de f en zéro.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} x(x\ln x) = 0$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en zéro, en posant $f(0) = 0$. Etudions la dérivabilité en zéro.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 \ln(0+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\ln h = 0$$

Le prolongement de f est donc dérivable en zéro, et le nombre dérivé en zéro est nul.

Conclusion : f est prologeable par continuité en une fonction C^1 sur $[0; +\infty[$, en posant $f(0) = 0$. On a alors $f'(x0) = 0$.