

Exercice - M0238C

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant $f(0) = 0$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) \leq f(x)$$

Montrons que f est la fonction nulle. Posons

$$\phi(x) = e^{-x} f(x)$$

$$\phi'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x))$$

La condition $f'(x) \leq f(x)$ nous assure que $\phi'(x)$ est négatif ou nul. La fonction ϕ est donc décroissante. Or $\phi(0) = e^{-0} f(0) = 0$, puisque $f(0) = 0$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \leq 0$$

Or f est une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \geq 0$$

Nous avons donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq f(x) \leq 0$$

Conclusion : la fonction f est nulle.