Exercice - M0239C

Soit f de classe C^1 sur $[a;b]$, admettant une dérivée seconde sur $]a;b[$. Montrons que, à tout point $x_0 \in]a;b[$, on peut associer $c \in]a;b[$ tel que

$$f(x_0) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0) - a = \frac{1}{2}(x_0-a)(x_0-b)f''(c)$$

Considérons la fonction définie par

$$\varphi(h) = f(h) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(h-a) - \frac{1}{2}(h-a)(h-b)k$$

Nous avons alors

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - kh + k\frac{a+b}{2}$$
$$\varphi''(x) = f''(x) - k$$

k est choisit de tel sorte que $\varphi(x_0) = 0$. (C'est évidement possible puisque la condition $\varphi(x_0) = 0$ conduit à une équation du premier degré en k). La fonction φ ainsi définie vérifie :

- $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$ et $\varphi(x_0) = 0$
- φ est continue sur $[a;b]$
- φ est dérivable sur $]a;b[$

Nous pouvons appliquer deux fois le théorème de Rolle. Il existe donc $c_1 \in [a;x_0[$ tel que $\varphi'(x) = 0$ et il existe $c_2 \in]x_0;b[$ tel que $\varphi'(c_2) = 0$. Considérons la fonction φ'. Elle vérifie sur $[c_1;c_2]$

- $\varphi'(c_1) = 0$
- $\varphi'(c_2) = 0$
- φ' est continue sur $[c_1;c_2]$ (car f est C^1 sur $[a;b]$ donc a fortiori sur $[c_1;c_2]$.

Il existe donc $c \in [c_1;c_2]$ tel que $\varphi''(c) = 0$. Autrement dit

$$\varphi''(c) = 0 \implies 0 = f''(c) - k \implies k = f''(c)$$

Pour résumé, pour tout réel x_0, il existe un réel c tel que $\varphi''(c) = 0$ et alors

$$\varphi(h) = f(h) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(h-a) - \frac{1}{2}(h-a)(h-b)f''(c)$$

La condition $\varphi(x_0) = 0$ s'ecrit

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) - \frac{1}{2}(x_0-a)(x_0-b)f''(c) = 0$$

Autrement dit

$$f(x_0) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) = \frac{1}{2}(x_0-a)(x_0-b)f''(c)$$

Conclusion : pour tout x_0, il existe c tel que

$$f(x_0) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0-a) = \frac{1}{2}(x_0-a)(x_0-b)f''(c)$$