Exercice - M0249C

On considère l'équation paramétrique suivante

$$x^2 - (m+1)x + 4 = 0 \qquad m \in \mathbb{R}$$

a) L'équation a une solution unique lorsque son discriminant est nul.

$$\Delta = (-(m+1))^2 - 4 \times 1 \times 4 = (m+1)^2 - 16 = 0$$

Ce qui conduit à

$$m + 1 = 4 \quad \text{ou} \quad m + 1 = -4$$

et finalement

$$m = 3 \quad \text{ou} \quad m = -5$$

Dans le cas $m = 3$ l'équation devient $x^2 - 4x + 4 = 0$. On a

$$x^2 - 4x + 4 = 0 = \Longleftrightarrow \ (x-2)^2 = 0 \ \Longleftrightarrow \ x = 2$$

la solution est $x = 2$.

Dans le cas $m = -5$ l'équation devient $x^2 + 4x + 4$. On a

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \ \Longleftrightarrow \ (x+3)^2 = 0 \ \Longleftrightarrow \ x = -2$$

la solution est $x = -2$

b) L'équation n'a aucune solution solution si et seulement le discriminant de l'équation est strictement négatif.

$$(m+1)^2 - 16 < 0 \ \Longleftrightarrow \ (m-3)(m+5) < 0$$

L'expression du second degré en m ci-dessus est négative entre ses racines, c'est-à-dire pour $m \in]-5; +3[$.