Exercice - M0250C

Soit m un réel donné ($m \neq 1$). On considère l'équation (E) suivante :

$$(m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$$

Montrons que pour tout m, ($m \neq 1$), l'équation admet deux solutions disctinctes x_1 et x_2 de signes contraires. La condition $m \neq 1$ nous assure que le coefficient du terme carré est non nul. L'équation est alors du second degré et nous pouvons calculer le discriminant.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m-1)(1-m) = 4 + 4(m-1)^2$$

Δ est positif, pour toute valeur de m disctincte de 1. L'équation a donc deux solutions que nous notons r_1 et r_2. Le produit des racines est :

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{1-m}{m-1} = -1$$

Les racines sont donc de signe contraire.

Conclusion : pour tout $m \neq 1$, l'équation $(m-1)x^2 - 2x + 1 - m = 0$ admet deux racines disctincte de signe contraire.

Rappel : Un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif admet deux racines r_1 et r_2. La somme et le produit des racines s'expriment simplement à l'aide des coefficients du trinôme.

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \qquad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$