Exercice - M0251C

A) Résolvons l'équation $x + \frac{1}{x} = 3$. Remarquons que x doit être différent de 0.

$$x + \frac{1}{x} = 3 \iff x + \frac{1}{x} - 3 = 0 \iff \frac{x^2 + 1 - 3x}{x} = 0$$

Une fraction est nulle si et seulement si le numérateur est nul. L'équation se ramène donc à une équation du second degré

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

Calculons le discriminant du trinôme.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 9 + 4 = 13$$

Le discriminant est strictement positif, il a donc deux solutions distincte

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \quad ; \quad \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

B) Résolvons l'équation $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1$

$$\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} = -1 \iff \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x-2} + 1 = 0$$

Réduisons au même dénominateur. Il vient

$$\frac{4(x-2) - 3(x-1) + (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\frac{4x - 8 - 3x + 3 + x^2 - 2x - x + 2}{(x-1)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)} = 0$$

Une fraction est nulle si et seulement le numérateur est nul et le dénominateur est différent de 0. Il convient donc d'exclure les valeurs $x = 1$ et $x = 2$. Annulons le numérateur.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

-1 est racine évidente. On en déduit la deuxième racine en utilisant le produit des racines

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \implies -1 \times x_2 = \frac{-3}{1} \implies x_2 = 3$$

Conclusion : l'ensemble des solutions est

$$S = \{-1; 3\}$$