Exercice - M0260

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. Montrer que si $x\in[1;2]$ alors $f(x)\in[1;2]$.
2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$$

   a) Ecrire un algorithme qui affiche les termes des suites (u_n) et (v_n) pour un rang demandé par l'utilisateur. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n).

   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par réccurence que :
   - Pour tout entier nature n, $1\leq v_n\leq 2$
   - Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}\leq v_n$

   On admettra de la même façon que :
   - Pour tout entier naturel n, $1\leq u_n\leq 2$
   - Pour tout entier naturel n, $u_n\leq u_{n+1}$

   c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

   En déduire que pour tout entier naturel n :

$$v_n-u_n\geq 0 \quad \text{et} \quad v_n-u_n\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

   d) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.