Exercice - M0260C

1) Etudions les variatios de la fonction f.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$
$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$f'(x)$ est donc positif et f est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

Pour tout $x \in [1; 2]$

$$1 \leq x \leq 2$$

f étant croissante

$$f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$
$$\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$$

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 \leq x \leq 2 \implies 1 \leq f(x) \leq 2$$

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 = 1 \quad u_{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_0 = 2 \quad v_{n+1} = f(v_n)$$

2a) L'algorithme permettant de calculer le n$^{\text{eme}}$

```
Entrer n
u <- 1
v <- 2
Pour i allant de 1 a n faire
    u <- (2*u + 1)(u+1)
    v <- (2*v + 1)(v+1)
Fin pour
Afficher u
Afficher v
```

2b) Montrons par réccurence que pour tout entier naturel n $1 \leq v_n \leq 2$.

Pour $n = 0$, $v_0 =$ et donc $1 \leq v_0 \leq 2$.

Supposons que $1 \leq v_n \leq 2$, montrons que $1 \leq v_{n+1} \leq 2$. D'après la question 1), si $v_n \in [1; 2]$ alors $f(v_n) \in [1; 2]$, donc $v_{n+1} \in [1; 2]$ ou encore $1 \leq v_{n+1} \leq 2$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$

Montrons par réccurence que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$.

Pour $n = 0$ nous avons $v_0 = 2$ et $v_1 = \frac{5}{3}$ donc $v_1 \leq v_0$.

Suppons que $v_{n+1} \leq v_n$, montrons que $v_{n+2} \leq v_{n+1}$. f étant croissante

$$v_{n+1} \leq v_n \implies f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \implies v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$.

2c) Montrons que pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= f(v_n) - f(u_n) \\
&= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\
&= \frac{(2v_n+1)(u_n+1) - (2u_n+1)(v_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)} \\
&= \frac{2u_nv_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_nv_n - 2u_n - v_n - 1}{(u_n+1)(v_n+1)} \\
&= \frac{v_n - u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

Nous en déduisons par une réccurence immédiate que pour tout n $v_n - u_n \geq 0$. En effet, pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et donc $v_0 - u_0 \geq 0$. Par ailleurs, $u_n + 1$ et $v_n + 1$ sont positif, donc Si $v_n - u_n \geq 0$ alors $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$.

Pour tout n entier naturel :

$$u_n \geq 1 \implies u_n + 1 \geq 2 \implies \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Il en est de même pour v_n donc

$$\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \frac{1}{4}$$

Il en résulte la relation de réccurence

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

Il en résulte, par une réccurence immédiate que pour tout n entier naturel :

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

En effet, pour $n = 0$, on a bien $2 - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$. Supposons

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Montrons que

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \\
&< \frac{1}{4}(v_n - u_n) \\
&< \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&< \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

2e) Montrons que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Elle est donc convergente, puisque tout suite croissante majorée converge. Soit α sa limite. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente, puisque toute suite décroissante minorée converge. Soit α' sa limite. Nous avons, pour tout n entier naturel

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} v_n - \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

et donc

$$\alpha' - \alpha = 0 \implies \alpha = \alpha'$$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont convergente et on même limite.