Exercice - M0262C

Soit k un nombre réel. On définit la fonction notée f_K sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x$$

1) On considère $k<0$

a) Déterminons les limites de f_k en 0 et en $+\infty$. Commençons par la limite en $+\infty$

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x = \frac{e^x}{x}(kx+1)$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}(kx+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \lim_{x\to+\infty}(kx+1)$$

Or

$$k<0 \implies \lim_{x\to+\infty}(kx+1) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$$

Recherchons maintenant la limite de f_k en 0.

$$f_k(x) = \frac{(kx+1)e^x}{x}$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+}(kx+1)e^x = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = +\infty$$

Conclusion

$$\boxed{\forall k<0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f_k(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty}$$

Remarque : l'étude pour $k \geq 0$ est très similaire on a

$$\boxed{\forall k\geq 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f_k(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty}$$

b) Calculons la dérivée de f_k

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= \frac{kx-(kx+1)}{x^2}e^x + \frac{kx+1}{x}e^x \\
&= e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{kx+1}{x}\right) \\
&= e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{kx^2+x}{x^2}\right) \\
&= e^x\left(\frac{kx^2+x-1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{f_k'(x) = \frac{e^x}{x^2}(kx^2+x-1)}$$

Recherchons le nombre de solution de l'quation $f_k(x)=0$ selon les valeurs de k.

$$f_k(x) = 0 \iff \frac{e^x}{x^2}(kx^2+x-1) = 0 \iff kx^2+x-1 = 0$$

Nous sommes donc ramener à étudier le nombre de solutions d'une équation du second degré en fonction d'un paramètre k. Calculons donc le discriminant et étudions son signe en fonction de k.

$$\Delta = 1 + 4k$$

Etudions le signe de Δ en fonction de k

$$\Delta > 0 \implies 1 + 4k > 0 \implies k > -\frac{1}{4}$$

Donc

- $-\frac{1}{4} < k < 0 \implies \Delta > 0$ donc l'équation $f_k'(x) = 0$ a deux solutions.
- $k = -\frac{1}{4} \implies \Delta = 0$ donc l'équation $f_k'(x) = 0$ a une solution.
- $k < -\frac{1}{4} \implies \Delta < 0$ donc l'équation $f_k'(x) = 0$ n'a pas de solution.

2) On considère les valeurs de k suivantes : $k = 0, k = -0,15, k = -0,24$ et $k = -1$. Associons 'a chacune des courbes la valeur de k correspondante.

Nous savons d'après l'étude faite à la question que pour tout valeur de k strictement négative, la limite de f_k en $+\infty$ est $-\infty$. La courbe (1) semble plutot avoir pour limite $+\infty$ est doit être associée à la valeur $k = 0$. Confirmons ceci. Pour $k = 0$ nous avons

$$f_0(x) = \frac{0x+1}{x}e^x = \frac{e^x}{x}$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$$

Ce qui confirme que la courbe (1) est associée à la valeur $k = 0$.

Toutes les autres courbes semblent avoir les mêmes limites, à savoir, $+\infty$ en 0 et $-\infty$ en $+\infty$. Il nous faut donc d'autres informations pour associer lchaque courbe à la valeur de k. Etudions les variations de f_k en fonction de k. En nous appuyant sur les résultats de la question 1b).

- Cas $k < -\frac{1}{4}$: Δ est négatif, donc le trinome $P(x) = kx^2 + x - 1$ est de signe constant et il est négatif, donc $f_k'(x)$ est négatif quelque soit $x \in]0; +\infty[$. La fonction f_k est donc monotone décroissante.
- Cas $k = -\frac{1}{4}$: $\Delta = 0$, donc $f_k'(x)$ est négatif, mais s'annule pour la valeur $x_0 = \frac{-1}{2k}$ et présente donc une tangente horizontale au point de coordonnée $(x_0, f_k(x_0))$.
- Cas $-\frac{1}{4} < k < 0$: La dérivée s'annule est change. Elle est du signe de $-k$ entre deux valeurs

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4k}}{2k} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4k}}{2k}$$

La fonction f_k est donc décroissante de 0 à x_1 puis croissante jusqu'à x_2 et décroissante ensuite. Ces informations sont suffisantes pour reconnaitre chaque courbe et l'associer à une valeur de k

Conclusion

$k = 0$	$\mathcal{C}_1$	La seule qui a pour limite $+\infty$
$k = -0,15$	$\mathcal{C}_2$	*Non montone*
$k = -0,24$	$\mathcal{C}_4$	Tangente horizontale ou presque
$k = -1$	$\mathcal{C}_3$	La seule strictement décroissante $k < -0,25$