Exercice - M0264

Méthode de Héron

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, puis calculer sa dérivée.
2. Montrer que
$$f'(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$$
En déduire le tableau de variation de f.
3. Calculer sous forme fractionnaire les termes u_1 et u_2.
4. Montrer par réccurence que pour tout entier naturel n
$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$
En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$$
6. En déduire, par un raisonnement par réccurence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$$
7. En déduire la limite la suite (u_n).