Exercice - M0264C

1) La fonction f est la somme de deux fonction de référence, une fonction affine et la fonction inverse, multipliée par des constantes. Elle est donc dérivable sur son domaine de définition. Calculons f'.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x^2-2}{x^2} \\
&= \frac{x^2-2}{2x^2} \\
&= \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$f'(x) = \frac{x^2-2}{3x^2}$$

2) Le numérateur est un trinome du second degé et c'est une différence de deux carrés. ll se factorise donc sous la forme :

$$f'(x) = \frac{x^2-(\sqrt{2})^2}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2^x 2}$$

On a donc bien

$$f'(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2^x 2}$$

Les racines du trinome sont donc $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, et nous pouvons affirmer que le trinome est négatif entre les racines. Le dénominateur étant un carré, il est toujours positif. La dérivée est donc du signe du numérateur. Nous en déduisons immédiatement le tableau de variation.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a pour les images de $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

$$f(\sqrt{2}) = -f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

3) Calculons les premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{3}{2} \\
u_1 &= f(u_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{9+8}{6} = \frac{17}{12} \\
u_2 &= f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{1}{2}\frac{17\times17+12\times24}{12\times17} = \frac{577}{408}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$u_0 = \frac{3}{2} \qquad u_1 = \frac{12}{17} \qquad u_2 = \frac{577}{408}$$

4) Montrons par réccurence que pour tout entier naturel n

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

Pour $n = 0$, et compte tenu de ce que nous venons de calculer, nous avons bien

$$\sqrt{2} < u_1 < u_0 \leq \frac{3}{2}$$

Suppsons que la propriété soit vraie au rang n, c'est-à-dire

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire

$$\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$$

Par hypothèse

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

La fonction f est strcitement croissante sur l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$ donc

$$f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f\left(\frac{3}{2}\right)$$

et donc

$$\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leq \frac{17}{12} \leq \frac{3}{2}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$$

Pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit la suite (u_n) est décroissante. Pour tout n, $u_n \geq \sqrt{2}$, la suite est donc minorée. Or toute suite décroissante minorée converge, donc la suite (u_n) est convergente.

5) Démontrons que pour tout n

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \sqrt{2} &= f(u_n) - \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n} - 2\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2} + \frac{2}{u_n} - \sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} - \sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\sqrt{2} < u_n \implies \frac{1}{u_n} < \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

nous en déduisons l'inégalité cherchée

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$$

6) Démontrons par réccurence que pour tout entier naturel n

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$$

Pour $n = 0$, nous avons d'une part

$$u_0 - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$$

et d'autre part

$$u_0 - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^0}(u_0 - \sqrt{2})$$

donc, la propriété et bien vérifiée pour $n = 0$.

Supposons que

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$$

Montrons que

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2})$$

Nous savons déjà que pour tout n $u_n > \sqrt{2}$ d'après la question 4). Il reste a établir la deuxième inégalité. D'après la question 5).

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$$

Nous pouvons utiliser l'hypothèse de réccurence pour majorer le membre de droite.

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$$

et donc

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - \sqrt{2})$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$$

7) Nous avons,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2}) = 0$$

En effet, c'est la limite de q^n avec $0 < q < 1$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des gendarmes.

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} u_n - \sqrt{2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})$$

et donc

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} u_n - \sqrt{2} \leq 0$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$$

Remarque : de façon plus générale on démontre que la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

converge vers $\sqrt{a}$. La convergence est très rapide ce qui donne un moyen algorithmique (manuel ou informatique) de calculer les valeurs approchées des racines carrées avec une très bonne efficacité.