

Exercice - M0265

Quels sont les tétraèdres de volume maximal inscrit dans une sphère de rayon R ? L'exercice se propose de répondre à cette question.

Partie 1 : Etude des triangles inscrits dans un cercle d'aire maximale.

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de rayon r .

1. Montrer par un raisonnement par l'absurde que le triangle ABC est isocèle en C .
2. Démontrer qu'un triangle d'aire maximale est équilatéral.
3. Calculer le coté du triangle.
4. Calculer l'aire du triangle;

Partie 2 : Tétraèdre de volume maximal

Soit $ABCD$ un tétraèdre inscrit dans une sphère de centre O et de rayon R . Soit H le pied de la hauteur issue de A .

1. Démontrer, par un raisonnement par l'absurde que la hauteur (AH) d'un tétraèdre de volume maximal passe par O .
2. Démontrer que : $r^2 = h(2R - h)$ où r est le rayon du cercle circonscrit au triangle BCD et h la hauteur du tétraèdre, c'est-à-dire la longueur AH .
3. Exprimer le volume du tétraèdre en fonction de h et R .
4. Déterminer une relation entre h et R pour un tétraèdre de volume maximal.
5. En déduire une relation entre r et R .
6. Calculer les cotés BC , CD et BD .
7. Calculer la longueur AB en fonction de R .
8. Calculer le volume du tétraèdre.
9. Conclure.