Exercice - M0270

Irrationalité de π

Supposons que $\pi = \frac{a}{b}$, ou $a, b \in \mathbb{N}^\star$.

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, \pi], \qquad f_n(x) = \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0$. Calculer I_0 et I_1
2. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer en étudiant f_n sur $[0, \pi]$, $\sup\limits_{x \in [0;\pi]} f_n(x)$.

   b) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leq b^n I_n \leq \frac{\pi^{2n+1} b^n}{4^n n!}$$
   puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} b^n I_n$
3. En utilisant deux intégrations par partie successives, montrer que :
   $$\forall n \geq 2, \quad \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, \mathrm{d}x = -\int_0^\pi f_n''(x) \sin x \, \mathrm{d}x$$
4. En déduire que :
   $$\forall n \geq 2, \quad I_n = (4n-2) I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}$$
5. Montrer que pour tout entier naturel n, I_n s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_{k,n} \pi^k$, ou les $\lambda_{k,n}$ sont dans $\mathbb{Z}$.

   En déduire que si $\pi = \dfrac{a}{b}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n I_n \geq 1$.
6. Justifier que $\pi \notin \mathbb{Q}$.