Exercice - M0270C

Supposons que $\pi = \frac{a}{b}$, ou $a, b \in \mathbb{N}^\star$.

Considérons la fonction f_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi], f_n(x) = \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \mathrm{d}x$$

1a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue et positive sur $[0, \pi]$. Il en est de même pour la fonction $sin(x)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0, \pi] \qquad f_n(x) \sin x \geq 0$$

Cette dernière fonction étant un produit de fonction continue elle est continue. On en déduit

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \mathrm{d}x \geq 0$$

La fonction $x \longrightarrow f_n(x) \sin x$ étant continue, l'hypothèse $I_n = 0$ est absurde, elle en entraine en effet

$$\forall x \in [0, \pi] f_n(x) \sin x = 0$$

Or

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^{2n}}{4^n n!} > 0$$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n > 0}$$

Calculons I_0

$$I_0 = \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

De même, calculons I_1.

$$I_1 = \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin x \mathrm{d}x$$

Intégrons par partie

$$\begin{aligned}
I_1 &= [(\pi x - x^2) \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x(\pi - 2x) \mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^\pi \cos x(\pi - 2x) \mathrm{d}x \\
&= [(\pi - 2x) \sin x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x \\
&= 0 + 2[-\cos x]_0^\pi \\
&= 2(-(-1) - (-1)) = 4
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{I_0 = 2 \qquad\qquad I_1 = 4}$$

2a) Etudions la fonction f_n et recherchons son maximum.

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!} \\
f_n'(x) &= \frac{n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)}{n!} \\
&= \frac{\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Donc

$$f_n'(x) = \frac{\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)}{(n-1)!}$$

f_n est du signe de $\pi - 2x$. On en déduit le tableau de variation.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi^{2n}}{4^n n!}$	$\searrow$	

Conclusion

$$\boxed{\sup_{x\in[0,\pi]} f_n(x) = \frac{\pi^{2n}}{4^n n!}}$$

b) Déterminons la limite de $b^n I_n$. On en déduit de la question précédent

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin x \, \mathrm{d}x \leq \int \sup_{x\in[0,\pi)]} \sin x \, \mathrm{d}x$$

donc

$$I_n \leq \frac{\pi^{2n}}{4^n n!}\int_0^\pi \mathrm{d}x$$

$$b^n I_n \leq b^n \frac{\pi^{2n}}{4^n n!}\pi$$

Conclusion

$$\forall n \geq 1 \qquad b^n I_n \leq \frac{b^n \pi^{2n+1}}{4^n n!}$$

Autrement dit

$$b^n I_n \leq \pi \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n}{n!}$$

Or

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad a^n << n!$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \pi \frac{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n}{n!} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{n\to\infty} b^n I_n = 0$$

3) Montrons que

$$\forall n \geq 2, \quad \int_0^\pi f_n(x)\sin x \, \mathrm{d}x = -\int_0^\pi f_n''(x)\sin x \, \mathrm{d}x$$

Intégrons par partie.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi f_n(x)\sin x \ \mathrm{d}x &= [f_n(x)(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi f_n'(x)\cos x \ \mathrm{d}x \\
&= -f_n(\pi)\cos\pi - (-f_n(0)\cos 0 + \int_0^\pi f_n'(x)\cos x \ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi f_n'(x)\cos x \ \mathrm{d}x \\
&= [f"_n(x)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi f_n''(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= f_n'(\pi)\sin\pi - f_n'(0)\sin 0 - \int_0^\pi f_n''(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\pi f_n''(x)\sin x \ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Conclusion

$$
\boxed{\int_0^\pi f_n(x)\sin x \ \mathrm{d}x = -\int_0^\pi f_n''(x)\sin x \ \mathrm{d}x}
$$

4) Calculons f_n' et f_n''.

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!} \\
f_n'(x) &= \frac{n(\pi x - x^2)^{n-1}(\pi - 2x)}{n!} = (\pi - 2x)f_{n-1}(x) \\
f_n''(x) &= -2f_{n-1}(x) + (\pi - 2x)(\pi - 2x)f_{n-2}(x)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
f_n''(x) &= -2f_{n-1}(x) + (\pi - 2x)^2 f_{n-2}(x) \\
f_n''(x) &= -2f_{n-1}(x) + \pi^2 f_{n-2}(x) - 4\pi x + 4x^2 f_{n-2}(x) \\
&= -2f_{n-1}(x) + \pi^2 f_{n-2}(x) - 4(\pi x - x^2)f_{n-2}(x) \\
&= -2f_{n-1}(x) + \pi^2 f_{n-2}(x) - 4(n-1)f_{n-1}(x) \\
&= -(4n-2)f_{n-1}(x) + \pi^2 f_{n-2}(x)
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
f_n''(x) = -(4n-2)f_{n-1}(x) + \pi^2 f_{n-2}(x)
$$

Reprenons l'égalité établie à la question précédente.

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi f_n(x)\sin x \ \mathrm{d}x = -\int_0^\pi f_n''(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi -(-(4n-2)f_{n-1}(x) + \pi^2 f_{n-2}(x))\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= (4n-2)\int_0^\pi f_{n-1}(x)\sin x \ \mathrm{d}x - \pi^2 \int_0^\pi f_{n-2}(x)\sin x \ \mathrm{d}x \\
&= (4n-2)I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}
\end{aligned}
$$

Conclusion

$$
\boxed{\forall n \geq 2 \qquad I_n = -(4n-2)I_{n-1} + \pi^2 I_{n-2}}
$$

5) Montrons que, pour tout entier naturel n, I_n s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,n}\pi^k$ ou les $\lambda_{k,n}$ sont des entiers relatifs.

Procédons par réccurence.

Pour $n=0$, nous avons $I_0=2$ donc $I_0=2\pi^0$. De même, pour $n=1$ nous avons $I_1=4$, donc $I_1=4\pi^0+0\pi^1$. Autrement dit

$$\lambda_{0,0}=2 \qquad \lambda_{0,1}=4 \quad \lambda_{1,1}=0$$

Supposons la propriété établie jusqu'au rang n, c'est à dire

$$\forall p \leq n \qquad I_n=\sum_{k=0}^{p}\lambda_{k,p}\pi^k \qquad \lambda_{k,p}\in\mathbb{Z}$$

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire

$$I_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_{k,p}\pi^k$$

Or

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=(4n+2)I_n-\pi^2 I_{n-1}\\
&=(4n+2)\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\pi^k-\pi^2\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{k,n-1}\pi^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}(4n+2)\lambda_{k,n}\pi^k-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{k,n-1}\pi^{k+2}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(4n+2)\lambda_{k,n}\pi^k-\sum_{k=2}^{n+1}\lambda_{k-2,n-1}\pi^{k}\\
&=(4n+2)\lambda_{0,n}+(4n+2)\lambda_{1,n}+\sum_{k=2}^{n}\left((4n+2)\lambda_{k,n}-\lambda_{k-2,n-1}\right)\pi^k-\lambda_{n-1,n-1}\pi^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc

$$I_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_{k,n+1}\pi^k$$

Avec

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,n+1}&=(4n+2)\lambda_0,n\\
\lambda_{1,n+1}&=(4n+2)\lambda_{1,n}\\
\lambda_{k,n+1}&=(4n+2)\lambda_{k,n}-\lambda_{k-2,n-1} \qquad \forall k\in\{2,3,\cdots,n\}\\
\lambda_{n+1,n+1}&=-\lambda_{n-1,n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \qquad I_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\pi^k \qquad \lambda_{k,n}\in\mathbb{Z}}$$

Supposons $\pi=\frac{a}{b}$. Il vient

$$b^n I_n=b^n\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\left(\frac{a}{b}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}a^k b^{n-k}$$

Donc $b^n I_n$ est un entier relatif. De plus $I_n>0$ d'après la question 1) et $b^n\neq 0$ donc $|b^n I_n|>0$.

Conclusion

$$\boxed{\pi=\frac{a}{b}\implies b^n I_n\geq 1}$$

6) Montrons que π est irrationnel. Nous avons démontré

$$\lim_{n\to\infty} b^n I_n=0$$

Supposons π rationnel. Il s'écrit alors $\frac{a}{b}$ ce qui entraine que $b^n I_n\geq 1$ ce qui est manifestement en contradiction avec la convergence de $b^n I_n$ vers 0. L'hypohèse π rationel est donc absurbe.

Conclusion : $\boxed{\pi \text{ est irrationel}}$