

Exercice - M0278

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

1. a) Calculer u_0
b) Vérifier que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, et en déduire u_1 .
2. a) Montrer que $\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ pour tout x dans $[0; 1]$.
b) A l'aide de la question précédente, montrer que $u_n \leq \frac{1}{n+1}$
c) En déduire que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. a) Montrer que $\frac{x^n(1-x)}{1+x} \geq 0$ pour tout x dans $[0; 1]$.
b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.