Exercice - M0278C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

1a) Calculons u_0

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1$$

Conclusion :

$$\boxed{u_0 = \ln 2}$$

1b) Montrons que $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}}$$

Nous en déduisons u_1.

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\ \mathrm{d}x = [x - \ln x]_0^1 = 1 - \ln 2 - (0 - \ln 1)$$

Conclusion

$$\boxed{u_1 = 1 - \ln 2}$$

2a) Montrons que $\dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$ pour tout x dans $[0;1]$. Nous avons, d'une part

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq x \leq 1 \implies 1 \leq x+1 \leq 2 \implies \frac{1}{\geq}\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^n \leq 1$$

Et en multipliant membre à membre les deux inégalités on obtient l'inégalité cherchée.

$$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ dans } [0;1], \quad \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n}$

2b) Montrons que $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Nous avons, pour tout x de $[0,1]$

$$\frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

donc en intégrant chaque membre de l'inégalité, nous obtenons :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\ \mathrm{d}x$$

et donc,

$$u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

2c) Déterminons la limite de la suite (u_n). Nous avons obtenu à la question 2a)

$$\forall x \in [0,10 \leq \frac{x^n}{x+1}$$

Donc en intégrant

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Autrement dit

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En prenant la limite de chaque membre, (théorème des gendarmes), il vient

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

3a) Montrons que $\dfrac{x^n(1-x)}{1+x} \geq 0$ pour tout x dans $[0;1]$. Nous avons

$$x \in [0,1] \implies 0 \leq x \leq 1$$

On en déduit

$$0 \geq -x \geq -1 \implies 1 \geq 1-x \geq 0$$

Tous les facteurs sont donc positifs

$$0 \leq x^n \qquad 0 \leq 1+x \qquad 0 \leq 1-x$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \qquad \frac{x^n(1-x)}{1+x} \geq 0}$$

3b) Montrons que la suite (u_n) est croissante. Calculons donc $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La fonction sous le signe somme est négative, d'après la question 3a). Donc l'intégrale sur $[0;1]$ est également négative.

$$\forall x \in [0,1] \qquad \frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0 \implies \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq 0$$

Autrement dit,

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \implies u_{n+1} \leq u_n$$

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$