

**Exercice - M0281**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ .

1. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
2. Montrer que pour tout  $n \geq 4$  la suite est positive. En déduire que pour tout  $n \geq 5$  on a  $u_n \geq (n-3)$
3. On définit la suite  $(v_n)$ , pour tout entier naturel  $n$ , par

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

- a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

- c. Soit la somme  $S_n$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Déterminer l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .