Exercice - M0281C

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$

1) Calculons les premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned}
&u_0 = 1\\
&u_1 = \frac{1}{3}u_1 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{3}\\
&u_2 = \frac{1}{3}u_2 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{-5}{3} - 1 = \frac{-5-9}{9} = -\frac{14}{9}\\
&u_3 = \frac{1}{3}u_3 + 2 - 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{-14}{9} = -\frac{14}{27}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{u_0 = 1 \qquad u_1 = -\frac{5}{3} \qquad u_2 = -\frac{14}{9} \qquad u_3 = -\frac{14}{27}}$$

2) Montrons par réccurence que pour tout $n \geq 4$ on a $u_n \geq 0$.

Calculons u_4

$$u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{-14}{27} + 1 = \frac{-14+81}{81} = \frac{67}{81} > 0$$

La propriété $u_n > 0$ est bien vérifiée pour $n = 4$.

Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n > 0$ (avec $n \geq 4$). Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$.

Par définition de la suite (u_n), on a

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

Or

$$n \geq 4 \implies \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq \frac{1}{3}u_n + 4 - 2 \implies u_{n+1} \geq \frac{1}{3}u_n + 2$$

On a évidement

$$u_n > 0 \implies \frac{1}{3}u_n > 0 \implies \frac{1}{3}u_n + 2 > 2 > 0$$

En résumé

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{3}u_n + 2 > 0$$

et donc

$$u_{n+1} > 0$$

Nous pouvons donc conclure que pour tout $n \geq 4$, u_n est positif.

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 4 \qquad u_n > 0}$$

Nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 1 - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$$

Or

$$n \geq 5 \implies n - 1 \geq 4 \implies u_{n-1} > 0$$

Nous en déduisons

$$\boxed{\forall n \geq 5 \qquad u_n \geq n - 3}$$

3) On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

3a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique, c'est-à-dire que $v_{n+1} = qv_n$ avec $q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\
&= -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\
&= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\
&= -\frac{2}{3}u_n + n + 7 - \frac{13}{2} \\
&= -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}v_n
\end{aligned}$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Calculons son premier terme.

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -2 - \frac{21}{2} = \frac{-4-21}{2} = -\frac{25}{2}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de premier terme } v_0 = -\frac{25}{2} \text{ et de raison } q = \frac{1}{3}}$

3b) Recherchons une expression explicite de u_n. Nous avons

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \implies u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{2}\right)$$

Par ailleurs la suite (v_n) est une suite géométrique, donc v_n s'exprime en fonction de v_0 et de la raison

$$v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

En reportant dans l'expression de u_n, il vient

$$u_n = -\frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}$$

3c) Calculons la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4}\right) \\
&= \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n}k - \sum_{k=0}^{n}\frac{21}{4} \\
&= \frac{25}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\
&= \frac{25}{4}\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21(n+1)}{4} \quad = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(3n-21)(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(3n-21)(n+1)}{4}}$$